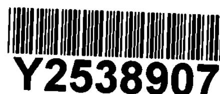
目　录



摘　要

Finsler 几何就是度量上没有二次型限制的黎曼几何. 伟大数学家黎曼(B.Riemann)早在 1854 年所作的具有历史意义的就职演说中已考虑了这种情况, 但鉴于没有二次型限制后计算上过于复杂, 他将研究限于二次型度量的几何, 也就是现在熟知的黎曼几何. 直到 1918 年 P.Finsler 在他的博士论文中才研究了一般度量的曲线和曲面. 因此, Finsler几何更确切地应称为黎曼-Finsler 几何. 为方便起见, 我们称其为 Finsler 几何. 1900 年, D.Hilbert 在巴黎数学家大会上提出的 23 个问题中第 4 和第 23 问题直接与 Finsler 几何有关. 此后, 在数学家E.Cartan、S.S.Chern(陈省身)、L.Berwald、J.Douglas 等人的努力下, Finsler 几何的内容日益丰富.

20 世纪 90 年代以后, 在陈省身先生的大力倡导下, 在鲍大卫(D.Bao), 沈忠民(Z.Shen)等人的努力下, Finsler 几何的研究取得了许多突破性的进展. 黎曼几何中的许多重要的整体性结果被推广到了 Finsler 几何. 这不仅仅是更普适的结果, 同时也给我们提供了一种更好的几何认知. 重要性的结果有: 测地线理论([5]), 比较定理([32, 39, 45]), 调和映射([12, 20, 31]), Gauss-Bonnet定理([6])等.

本文主要研究 Finsler 流形上某些函数论性质, 内容分为两部分, 第一部分研究了 Finsler 流形上的广义极值原理, 并且利用广义极值原理研究 Finsler 流形中调和(下或上调和)函数的 Liouville 定理; 第二部分首先研究了 Finsler 流形上 L^p可积的调和(下或上调和)函数的 Liouville 定理, 然后, 给出紧致无边的 Finsler 流形中调和函数的梯度估计, 并得到推论: 对于带权 Ricci 曲率非负的这样的Finsler 流形, 其上的调和函数是常数; 最后给出 Finsler 流形中热方程解的唯一性定理.

关键词: Finsler 度量, Finsler-Laplacian, 广义极值原理, 调和(下或上调和)函数, Liouville 定理, 热方程.

一. Finsler流形上的广义极值原理及其应用

众所周知, Hopf 极大值原理是研究几何分析的一个有力的工具. H.Omori 和 Yau 把 Hopf 极值原理推广到完备非紧的黎曼流形([9, 27, 42]), 即, 若 M 是一个 Ricci 曲率有下界的完备黎曼流形, u 是一个 C^2 有上界函数, 则存在 M 中的点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u,\ \lim_{k\to\infty} |\nabla u|(x_k) = 0,\ \lim_{k\to\infty}\sup \Delta u(x_k) \le 0.$$

我们也把此定理称为广义极值原理或 Omori -Yau 极值原理. 广义极值原理已有很多重要的结果([8, 13, 28, 29, 41, 42]), 并且已被广泛应用. 因此, 我们希望将广义极值原理推广到 Finsler 流形上.

为此, 我们首先要给出 Finsler 流形上的梯度和 Laplacian 的定义. 设 (M, F) 是一个 Finsler 流形, 对任意的 $x \in M$, Legendre 变换 $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ 定义为([30])

$$\mathcal{L}(y) := g(y, \cdot) = g_{ij}(x, y)y^i dx^j,\ \forall y \in T_xM\backslash\{0\}, \quad \mathcal{L}(0) := 0.$$

可以证明 Legendre 变换 $\mathcal{L}$ 是 $TM\backslash\{0\}$ 到 $T^*M\backslash\{0\}$ 的微分同胚, 因此, 存在逆变换 $\mathcal{L}^{-1} : T^*M\backslash\{0\} \to TM\backslash\{0\}$([30]). 此外, Legendre 变换 在零截面上只是连续的. 与黎曼流形不同的是, Finshler 流形上的 Legendre 变换是非线性变换.

利用 Legendre 变换, 我们可以定义函数的梯度. 给定函数 $u \in C^2(M)$, u 在 x 点的梯度向量场([30])

$$\nabla u(x) := \mathcal{L}^{-1}(du(x)) \in T_xM.$$

在局部坐标下, ∇u 表示为

$$\nabla u := \begin{cases} g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} & x \in M_u, \\ 0 & x \in M \setminus M_u. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

其中 $M_u = \{x \in M | du(x) \neq 0\}$. 值得注意的是, ∇u 在 $M\backslash M_u$ 上只是连续的, 但在 M_u 上是 C^1 的, 并且 $\nabla(-u) \neq -\nabla u$.

Finsler 流形上函数的 Laplacain 则定义为梯度的散度. 设 $dm = \sigma(x)dx$ 是 Finsler 流形 M 上任意给定的体积元, u 的 Finsler-Laplacian 定义为([33])

$$\Delta u := \mathrm{div}_\sigma(\nabla u) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right), \tag{0.0.2}$$

其中 div_σ 表示关于体积元 $dm=\sigma(x)dx$ 的散度.

由于 Legendre 变换是非线性变换, 因此, Finsler-Laplacian 是一个非线性的二阶椭圆算子([35]), 并且它在 M_u 是光滑的, 而在 $M\backslash M_u$ 上无法用(0.0.2)定义. 可见, Finsler-Laplacian 与黎曼流形上的 Laplacian 有本质的区别, 故在一般情形下, 我们都考虑其在分布意义下的定义([25, 33]), 即, 对 $u\in H^1_{loc}(M)$, $\forall\varphi\in C_c^\infty(M)$ 有

$$\int_M \varphi\Delta u dm := -\int_M d\varphi(\nabla u)dm.$$

另外, 由于 Finsler 流形上的散度依赖于体积元的选取, 通过不同的体积元我们可以定义不同的 Laplacian. 然而, 当 F 是黎曼度量时, Finsler-Laplacian 就是黎曼流形上的 Laplacian.

假设 u 是 M 上的 C^2 函数, 若 u 满足 $\Delta u=(\geq,\leq)0$, 则称 u 是 M 上的 Finsler 调和(下调和,上调和)函数. 由于 Δu 在 $M\backslash M_u$ 上几乎处处为零([25]), 所以若 u 是 M 上的 Finsler 调和(下调和,上调和)函数, 则 u 在分布意义下也是 M 上的调和(下调和,上调和)函数.

对于上述的Laplace算子, 沈忠民([32]), 吴炳烨和忻元龙([39]) 以及赵唯和沈一兵([45])等建立了Finsler流形上的体积比较定理. 沈忠民([11, 35]), 王国芳和夏超([37]), 尹松庭和贺群等([44])建立Finsler 流形上的第一特征值估计. 此外, 对上述的Laplace算子, Ohta还研究了Finsler 流形上的热流, 分裂定理, Li-Yau 型梯度估计([24, 23, 25]).

为了下面的研究需要, 我们给出带权 Ricci 曲率的概念([30, 25, 26]).

设 (M,F,dm) 是一个 n 维带有光滑体积测度 $dm=\sigma(x)dx$ 的 Finsler 流形, 给定一个向量 $y\in T_xM\backslash\{0\}$, 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是满足 $\gamma(0)=x$ 和 $\gamma'(0)=y$ 的一条测地线, 则 F 的畸变定义为

$$\tau(x,y):=\log\left\{\frac{\sqrt{det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma(x)}\right\},$$

F 的 S-曲率 S 定义为

$$S(x,y):=\frac{d}{dt}[\tau(\gamma(t),\gamma'(t))]_{t=0}.$$

我们还可以定义

$$\dot S(x,y):=\frac{d}{dt}[S(\gamma(t),\gamma'(t))]_{t=0}.$$

带权的 Ricci 曲率(weighted Ricci curvature)定义为([30])

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}_n(y) := \begin{cases} \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y), & \text{当} S(y) = 0, \\ -\infty & \text{当} S(y) \neq 0, \end{cases} \\ \mathrm{Ric}_N(y) := \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y) - \frac{S(y)^2}{N-n}, \quad \forall N \in (n, \infty). \\ \mathrm{Ric}_\infty(y) := \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y), \end{cases}$$

其中 $S(y)$ 表示 S 曲率在 (x,y) 取值, $\mathrm{Ric}(y)$ 表示在 (x,y) 的关于 F 的 Ricci 曲率.

注 1. 这里的 $\mathrm{Ric}_N(y)$ 关于 y 是二次齐次的, 即对 $c \in R$, $\mathrm{Ric}_N \geq c$ 是指 $\mathrm{Ric}_N(y) \geq cF(y)^2$. 当 F 是黎曼度量时, S 曲率消失, 此时, 带权的 Ricci 曲率就为黎曼流形上的 Ricci 曲率.

1.1. Finsler 流形上的广义极值原理

设 (M,F) 是一个 n 维 Finsler 流形. 给定点 $p \in M$, 对于任意的 $x \in M$, 记 $r(x)$ 是从 p 点出发的距离函数. 设 $\gamma : [0,r] \to M$ 是从 p 到 x 的单位极小测地线. 类似于 Yau 在文献 [9, 42] 中的工作, 令

$$K_\gamma(x) := \min_{0 \leq k \leq r(x)} \left\{ \frac{N-1}{r(x)-k} - \frac{1}{(r(x)-k)^2} \int_k^{r(x)} (t-k)^2 \mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt \right\},$$

其中 $\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))$ 表示带权 Ricci 曲率 Ric_N 在 $(\gamma(t), \gamma'(t))$ 取值.

若 x 在 p 的割迹内, 我们取 γ 为从 p 到 x 唯一的极小测地线, 并定义 $K(x) := K_\gamma(x)$. 否则, 我们定义 $K(x) := \min_\gamma K_\gamma(x)$, 其中 γ 取遍所有从 p 到 x 的极小测地线.

定理 0.1. *设 (M,F,dm) 是一个带有体积测度 dm 的向前完备 Finsler 流形, u 是 M 上非常值的有上界 C^2 函数. 则存在序列 $\{x_k\} \subset M_u$, 使得*

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \\ &F(\nabla u)(x_k) = \frac{2r(x_k)[u(x_k) - u(p) + 1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}, \\ &\Delta u(x_k) \leq \frac{2\left(r(x_k)K(x_k)+1\right)[u(x_k)-u(p)+1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} \\ &\qquad + \frac{4r^2(x_k)\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k^2(r^2(x_k)+2)^2(\log(r^2(x_k)+2))^2}, \end{aligned}$$

其中 $r(x) = d(p,x)$, p 是 M_u 中的一个固定点.

当 (M,F) 是黎曼流形时, 定理 0.1 即为 Yau 在文献 [9] 中的定理 3. 根据定理 0.1 及带权的 Ricci 曲率的定义, 我们可以得到以下结果.

定理 0.2. *设 (M,F,dm) 是一个向前完备的 Finsler 流形, u 是 M 上非常值的有上界 C^2 函数. 若带权的 Ricci 曲率 Ric_N 有下界, 则存在序列 $\{x_k\} \subset M_u$, 使得*

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \ \lim_{k\to\infty} F(\nabla u)(x_k) = 0, \ \limsup_{k\to\infty} \Delta u(x_k) \le 0.$$

1.2. Finsler 流形上的广义极值原理的应用

在黎曼流形中, 若函数 u 是上调和函数, 那么, 函数 $-u$ 就是下调和函数. 因此, 在黎曼流形中, 上调和函数的性质本质上与下调和函数的性质相同. 但在 Finsler 流形中, 一般 $\Delta(-u) \neq -\Delta u$. 因此, 我们需要分别讨论下调和函数和上调和函数的性质.

定理 0.3. *设 (M,F,dm) 是一个向前完备的 Finsler 流形, 假定存在一个紧集, 使得带权的 Ricci 曲率在紧集外满足 $Ric_N \geq c$ (c 是一个常数), 则在流形 M 上不存在非常值的有上界(下界)的下(上)调和函数.*

定理 0.3 类似于 Yau 在文献 [9] 中的推论 2.1, 即: 若 M 是一个完备的黎曼流形, 使得在一个紧集外满足 Ricci 曲率有下界 $(\dim M + \varepsilon)/r^2$, 其中 r 是从某个固定点出发的距离函数, $\varepsilon > 0$ 是一个常数, 则 M 上不存在非常值的正的上调和函数.

类似于文献 [29] 中的定理 2, 我们给出以下定理.

定理 0.4. *设 (M,F,dm) 是一个 Ric_N 非负的向前完备 Finsler 流形. 若 u 是 M 上有上界的 C^2 函数, 且存在正常数 c, 使得*

$$\Delta u \geq cF(\nabla u),$$

则 u 是常数.

此外, 利用定理 0.2, 我们可以得到下面的 Liouville 定理, 它是文献 [10] 中主要定理的推广.

定理 0.5. 设 (M, F, dm) 是一个 Ric_N 有下界的向前完备 *Finsler* 流形. 若 u 是 M 上非负的 C^2 函数, 且存在正常数 c 及实数 $t > 1$, 使得

$$\Delta u \geq cu^t,$$

则 $u \equiv 0$.

二. Finsler流形上的Liouville定理和唯一性定理

经典的调和函数的 Liouville 定理是指 $\mathbb{R}^n$ 中每个非负或有界的调和函数一定是常数. 自上个世纪以来, 完备黎曼流形中调和函数的各种 Liouville 定理已有了广泛的研究. 此外, 完备非紧流形上热方程解的唯一性问题, 也一直深受数学家们的关注.

一个自然的问题是如何把黎曼流形中调和函数的 Liouville 定理和热方程解的唯一性定理推广到 Finsler 流形上.

由于 Finsler 流形上的几何量与方向有关, 且一般情况下, Finsler 度量不具有对称性, 即Finsler 度量不是可反的, 为此, 我们给出 Finsler 流形上可反系数的概念.

设 (M, F) 是一个 Finsler 流形, 若对 $y \in T_xM$, $F(x, -y) = F(x, y)$, 我们称 F 是可反的. 一般情况下, Finsler 度量不具有可反性, 因此, 我们令([30])

$$\Lambda := \sup_{(x,y)\in TM\setminus\{0\}} \left\{ \frac{F(x, -y)}{F(x, y)} \right\},$$

称 Λ 为 (M, F) 的可反系数. 显然, F 可反的充要条件是 $\Lambda = 1$. 此外, 当Finsler度量是黎曼度量时, 基本张量与方向无关, 因此 $\Lambda = 1$.

2.1. Finsler流形上L^p可积的调和函数的Loiuville定理

设 (M, F, dm) 是一个带有光滑体积测度 dm 的向前完备 Finsler 流形, u 是 M 上非负的 C^2 函数. 对 M 中的某点 x_0 及 $r > 0$, $B_r^+(x_0)$ 表示以 x_0 为心, r 为半径的向前测地球, 它关于 dm 的体积记为 $V(r)$. 类似于文献 [34]中的结果, 对 $p \in \mathbb{R}$, 我们令

$$V_p(r) := \int_{B_r^+(x_0)} u^p dm.$$

注意, 当 $p<0$ 时, 我们要求 u 是 M 上的正函数. 特别地, 当$p=0$时, $V_p(r)$ 即为 $V(r)$.

定理 0.6. *设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形, u 是 M 上非负的 C^2 函数. 假设*

$$\int_1^\infty \frac{r}{V_p(r)}dr=\infty. \tag{0.0.3}$$

a) 若 $p\in[0,1)$ 且 u 是 M 上非负的上调和函数, 则 u 为常数.

b) 若 $p\in(1,\infty)$ 且 u 是 M 上非负的下调和函数, 则 u 是常数.

c)若 $p\in(-\infty,0)$ 且 u 是 M 上正的上调和函数, 则 u 为常数.

注 2. 在黎曼流形中, 上述定理是由 Karp([16]) 和 Grigor'yan A.([2, 3]) 给出, 之后 Sturm([34]) 把它推广到 Dirichlet 空间的情况上.

注 3. 当函数 $u\in L^p(M)(p>0$ 且 $p\neq 1)$ 时, 满足定理 0.6 的条件. 并且对正常数 C , 当向前测地球的体积满足

$$V(r)\le Cr^2 \text{或}\ \ V(r)\le Cr^2\log r,$$

也满足定理 0.6 的条件.

因此, 我们有以下两个推论, 它们分别推广了 Yau 在文献 [43] 中的定理 3 和 Cheng 与 Yau 在文献 [9] 中的推论 1.1.

推论 0.7. *设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形.*

a) 若 $p\in[0,1)$, 则每个非负的 L^p 上调和函数是常数. 特别地, 若M的体积 $V(M)<\infty$, 则 M 上每个非负的上调和函数是常数.

b) 若 $p\in(1,\infty)$, 则每个非负的 L^p 下调和函数是常数.

推论 0.8. *设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形. 若存在正常数 C 及序列 $R_k\to+\infty$, 使得*

$$V_p(R_k)\le CR_k^2,$$

则我们有以下结果:

a) 若 $p\in[0,1)$, 则每个非负的 L^p 上调和函数是常数. 特别地, 若 $V(R_k)<CR_k^2$, 则 M 上每个非负的上调和函数是常数.

b) 若 $p\in(1,\infty)$, 则每个非负的 L^p 下调和函数是常数.

定理 0.9. *设 (M,F,dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形, u 是 M 上 C^2 正函数. 令 $V_1(r) := \int_{B_r^+(x_0)} udm$. 若 $\Delta \log u \geq 0$ 且*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^2}{V_1(r)} = \infty, \tag{0.0.4}$$

则 u 是常数. 特别地, 若 $u \in L^1(M)$ 且 $\Delta \log u \geq 0$, 则 u 是常数.

定理 0.9 推广了 Yau 在文献 [43] 定理 1 中的结果, 即在完备的黎曼流形中, 若 $L^p(p>0)$ 可积的函数 u 满足 $\Delta \log u = 0$, 则可推出 u 为常数.

注 4. 在定理 0.9 中, 我们只讨论了 $p=1$ 的情况, 这是因为定理 0.6 的条件包含了定理 0.9 的条件, 且由 $\Delta \log u = 0$ 可得 $\log u$ 是调和函数. 因此, 当 $p \neq 1$ 时, 定理 0.6 的 $a)$ 和 $b)$ 已经包含了 Yau 在文献 [43] 定理 1 中 $p \neq 1$ 的情况.

2.2. 紧致无边的Finsler流形上调和函数的梯度估计

由于 Finsler 流形上的几何量与方向有关, 因此, Finsler 流形中调和函数的梯度估计比黎曼流形上的复杂. 为此, 我们将讨论紧致无边的 Finsler 流形中调和函数的梯度估计.

由于带权的 Ricci 曲率 $Ric_N(x,y)$ 关于 y 是二次齐次的, 故 $\frac{1}{F^2(y)}Ric_N(x,y)$ 是射影球丛 SM 上的函数. 因此, 若 (M,F,dm) 是一个紧致无边的 Finsler 流形, 则 $\frac{1}{F^2}Ric_N$ 一定有界. 对于 (M,F,dm) 上的调和函数, 我们有下面的梯度估计.

定理 0.10. *设 (M,F,dm) 是一个 n 维紧致无边的 Finsler 流形, u 是 M 上的调和函数, 则带权 Ricci 曲率 Ric_N 有非正下界 K, 且有*

$$F(x,\nabla u) \leq \sqrt{-(N-1)K}(u - \inf_M u).$$

推论 0.11. *设 (M,F,dm) 是一个 n 维紧致无边的 Finsler 流形, u 是 M 上的调和函数, 若 $Ric_N \geq 0$, 则 u 是一个常数.*

当 F 是一个黎曼度量时, 上述结果即为黎曼流形中调和函数的梯度估计([42]).

2.3. Finsler流形上热方程解的唯一性定理

2009 年, Ohta 和 Sturm 在文献 [24] 中研究了 Finsler 流形上非线性的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

其中 Δ 是 Finsler 流形上的非线性 Laplacian. 他们还给出了 Finsler 流形上热方程的整体解与局部解的存在性和正则性定理 ([24]).

设 $\Omega \subset M$ 是一个开集, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, 定义狄利克雷能量([25])

$$E_\Omega(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega F^2(\nabla u)dm.$$

若 $\Omega = M$, 则 $E_\Omega = E_M$. 令

$$H^1(\Omega) := \{u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega) | E_\Omega(u) < \infty\},$$

并且记 $H^1_0(\Omega)$ 是 $C^\infty_c(\Omega)$ 关于 (Minkowski) 模 $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \|u\|_{L^2}(\Omega) + E_\Omega(u)^{\frac{1}{2}}$ 的闭包, $H^{-1}(\Omega)$ 表示 $H^1_0(\Omega)$ 的对偶空间. 下面我们给出 Finsler 流形上热方程的整体解的定义和存在性定理([24]).

设 (M, F, dm) 是一个向前完备的 Finsler 流形. 对某个固定的 $T > 0$, $\forall t \in [0, T]$, 若 $u(x,t) \in L^2(H^1_0(M), [0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M), [0,T])$, 且对 $\forall \varphi \in C^\infty_c(M)$ 有

$$\int_M \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dm = -\int_M d\varphi(\nabla u) dm,$$

则称 u 是热方程在 $M \times [\,0, T]$ 上的整体解([24]定义 3.1).

注意, 若 $u(x,t) \in L^2(H^1_0(M), [0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M), [0,T])$, 我们可以得到 $u \in C(L^2(M), [0,T])$([24]).

此外, Ohta 和 Sturm 给出了整体解的存在性和正则性定理: 对每个 $u_0 \in H^1_0(M)$ 及某个 $T > 0$, 在 $M \times [0,T]$ 上存在热方程的整体解 u, 且分布 Laplace $\Delta u(x,t)$ 关于体积测度 dm 和任意的 t 是绝对连续的([24]定理 3.4).

下面给出 Finsler 流形上的 L^p $(p > 1)$可积的热方程解的唯一性定理. 它是 Peter Li 在文献 [18] 中对应结果的推广.

定理 0.12. *设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形. 对某个 $T > 0$, $\forall t \in [0,T]$, 假设 $u(x,t)$ 是一个定义在$M \times [0,T]$上的非负函数,*

且 $u(x,t) \in L^2(H_0^1(M), [0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M), [0,T])$, 满足 $u(x,0)=0$, 并且对 $p>1$, 及任意非负的 $\varphi \in C_c^\infty(M)$ 有

$$\int_M \{\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + d\varphi(\nabla u)\} dm \leq 0, \ \int_M u^p(x,t) dm < \infty,$$

则在 $M \times [0,T]$ 上, $u(x,t) \equiv 0$.

此外, Karp 和 Li 在文献 [14] 中证明了, 若完备黎曼流形上测地球 $B_r(x_0)$ 的体积 $V(r)$, 满足 $V(r) \leq e^{cr^2}$ (c=const.), 则热方程的任意有界弱解由解的初值唯一决定. 之后, T.Sturm([34]) 和 Grigor'yan A.([4]) 把 Karp 和 Li 的结果中体积增长的条件推广到以下情况,

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{\log V(r)} = \infty.$$

然后, Grigor'yan A. 在 [1](定理11.9)中将 T.Sturm([34]) 和 Grigor'yan A.([4])结果中测地球体积增长的条件推广到更一般的情况. 下面我们将研究 Finsler 流形上的类似问题.

设 (M,F,dm) 是一个向前完备的 Finsler 流形. 为了方便, 记 $B_r := B_r^+(x_0)$, 它关于 dm 的体积记为 $V(r)$. 类似于 Grigor'yan A. 在文献 [1](定理 11.9)中的结果, 我们有以下定理.

定理 0.13. *设 (M,F,dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备Finsler流形, 对某个 $T>0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的整体解, 且在 L_{loc}^2 的意义下满足 $u|_{t=0}=0$. 假设对 $x_0 \in M$, $R>0$ 有*

$$\int_0^T \int_{B_R} u^2(x,t) dmdt \leq \exp(f(R)),$$

其中 $f(r)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的单增函数, 使得

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{f(r)} = \infty,$$

则在 $M \times (0,T)$ 上, $u(x,t) \equiv 0$.

若 $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的有界整体解, $H := \sup|u| < \infty$, 且令定理 0.13 中的 $f(r) = \log H^2TV(r)$, 则类似于 T.Sturm([34]) 和 Grigor'yan A.([4]) 的结果, 我们可以得到以下推论.

推论 0.14. 设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 *Finsler* 流形, 对某个 $T > 0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的有界整体解, 且在 L^2_{loc} 的意义下满足 $u|_{t=0} = 0$. 假设

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{\log V(r)} = \infty,$$

则在 $M \times (0,T)$ 上, $u(x,t) \equiv 0$.

显然, $V(r) \leq e^{cr^2}$ 满足上述推论的条件, 因此, 我们可以推广 Karp 和 Li [14] 中的主要定理.

推论 0.15. 设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 *Finsler* 流形, 对某个 $T > 0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的有界整体解, 且在 L^2_{loc} 的意义下满足 $u|_{t=0} = 0$. 假设对正常数c有

$$V(r) \leq e^{cr^2},$$

则在 $M \times (0,T)$ 上, $u(x,t) \equiv 0$.

Abstract

Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic Restriction. In his "Habilitationsvortrag" of 1854, the famous mathematician Riemann mentioned this general case. In views of the complicated computations in Finsler geometry, he turned to the geometry of quadratic metric, which has been known as Riemannian geometry. Hence, Finsler geometry is also conferred the name Riemann-Finsler geometry. We just call it Finsler geometry for brevity, in recognition of Finsler's thesis on the subject in 1918. In his famous Paris address of 1900, Hilbert formulated 23 problems, in which Problem 4 and 23 were included in the category of Finsler geometry. Thereafter, under the efforts of E.Cartan, S.S.Chern, L.Berwald, J.Douglas and other geometers, Finsler geometry has developed into a fruitful branch in differential geometry.

After 1990s, on the initiative of S.S.Chern, Finsler geometry has been developed tremendously. Many geometers worked in this field such as D.Bao and Z. Shen, etc. It has been proved that a lot of global results in Riemannian geometry still holds for Finsler geometry. This not only provides some universal results, but also gives a better understanding of the geometry to us. The representative works are as follows: the geodesic theory([5]), comparison theorems([32, 39, 45]), harmonic maps for Finsler manifolds([12, 20, 31]), the Gauss-Bonnet theorem([6]), etc.

The purpose of this paper is to study some properties of function theoretic on Finsler manifolds. The content is divided into two parts. In the first part, we give the generalized maximum principle on forward complete Finsler manifolds, and study some Liouville-type theorems for harmonic(subharmonic, superharmonic) functions by the use of the generalized maximum principle. In the second part, we first study L^p-Liouville theorems for harmonic(subharmonic, superharmonic) functions on Finsler manifolds, then we give the gradient estimate for harmonic functions on compact Finsler manifolds without boundary, as an application,

we get that the harmonic function is a constant on such manifolds with non-negative Ric_N. Finally, we study uniqueness theorems for heat equations on Finsler manifolds.

Keywords: Finsler metric, Finsler-Laplacian, harmonic(subharmonic, superharmonic) functions, the maximum principle, Liouville theorem, heat equation.

1. Generalized maximum principle and its application on complete Finsler manifolds

It is well-known that Hopf's maximum principle is a powerful tool in studying geometry analysis. It is extended by H.Omori and Yau to complete noncompact Riemannian manifolds([9, 27, 42]), which says that if M is a complete Riemannian manifold with Ricci curvature bounded from below and u is C^2 function bounded from above, then there exists a sequence $\{x_k\}$ on M such that

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \ \lim_{k\to\infty} |\nabla u|(x_k) = 0, \ \limsup_{k\to\infty} \Delta u(x_k) \leq 0.$$

Recently, Omori -Yau maximum principle has been widely used in various problems, and there have been many important results about it([8, 13, 28, 29, 41, 42]). In this section, we will extend Omori -Yau maximum principle to Finsler manifolds.

For this purpose, we first give the definition of Finsler gradient and Finsler-Laplacian. Let (M, F) be a Finsler manifold. For any $x \in M$, Legendre transformation $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ is defined as ([30])

$$\mathcal{L}(y) := g(y, \cdot) = g_{ij}(x, y) y^i dx^j, \ \forall y \in T_xM\backslash\{0\}, \quad \mathcal{L}(0) := 0.$$

It is a diffeomorphism from $TM\backslash\{0\}$ to $T^*M\backslash\{0\}$, thus, there exists the inverse transformation $\mathcal{L}^{-1} : T^*M\backslash\{0\} \to TM\backslash\{0\}$ ([30]). In addition, $\mathcal{L}$ is just continuous at zero-section. Unlike the case of Riemannian manifolds, Legendre transformation is non-linear on Finsler manifolds.

We define the gradient vector by means of Legendre transformation. Given $u \in C^2(M)$, then the gradient vector $\nabla u(x)$ is defined as([30])

$$\nabla u(x) := \mathcal{L}^{-1}(du(x)) \in T_xM.$$

In a local coordinate system, we express ∇u as

$$\nabla u := \begin{cases} g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} & x \in M_u, \\ 0 & x \in M \setminus M_u. \end{cases}$$

Note that ∇u is only continuous on M, but C^1 on M_u, and $\nabla(-u) \neq -\nabla u$.

Finsler-Laplacian of a function is defined as the divergence of the gradient. Let $dm = \sigma(x)dx$ be a smooth volume measure on Finsler manifolds. Finsler-Laplacian of u is defined as ([33])

$$\Delta u := \mathrm{div}_\sigma(\nabla u) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right), \tag{0.0.5}$$

where div_σ is the divergence with respect to $dm = \sigma(x)dx$.

Since Legendre transformation is nonlinear, Finsler-Laplacian is a second-order nonlinear elliptic operator([35]). It is smooth on M_u but can not be defined by (0.0.5) on $M \backslash M_u$. It is thus clear that Finsler-Laplacian is essentially different from the Laplacian on Riemannian manifolds. Therefore, we generally consider its definition in the sense of distribution([25, 33]), that is, for $u \in H^1_{loc}(M)$, the distributional Laplacian([25, 33])of u is defined as

$$\int_M \varphi \Delta u dm := -\int_M D\varphi(\nabla u)dm$$

for $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

In addition, since the divergence depends on the volume element on Finsler manifolds, different Laplacian is defined by different volume element. Note that Finsler-Laplacian reduces to the Laplacian on Riemannian manifolds when F is a Riemannian metric.

A function $u \in C^2(M)$ is called a Finslerian harmonic (resp. subharmonic, superharmonic) function on M if $\Delta u = (\geq, \leq)0$ on M_u. Since $\Delta u = 0$ a.e on

$M\backslash M_u$([25]), u is a harmonic function implies that u is a harmonic function in the sense of distribution.

For such Laplacian, Shen([32]), Wu and Xin([39]) and Zhao and Shen([45]) established volume comparison theorems for Finsler manifolds. Shen([11, 35]), Wang and xia([37]) and Yin, He and Shen([44]) gave some estimates for the first eigenvalue. Moreover, the heat flow, splitting theorem and Li-Yau type gradient estimates have been studied by Ohta([24, 23, 25]).

In the following, we give the definition of the weighted Ricci curvature([30, 25, 26]).

Let (M, F, dm) be a n-dimensional Finsler manifold with smooth volume measure $dm = \sigma(x)dx$. Given a vector $y \in T_xM\backslash\{0\}$, let $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ be the geodesic such that $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = y$. Then the distortion of F is defined by([30])

$$\tau(x, y) := \log\left\{\frac{\sqrt{det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma(x)}\right\},$$

and S-curvature S is defined by

$$S(x, y) := \frac{d}{dt}[\tau(\gamma(t), \gamma'(t))]_{t=0}.$$

We also define

$$\dot{S}(x, y) := \frac{d}{dt}[S(\gamma(t), \gamma'(t))]_{t=0}.$$

The weighted Ricci curvature is defined by([30])

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}_n(y) := \begin{cases} \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y), & S(y) = 0, \\ -\infty & S(y) \neq 0, \end{cases} \\ \mathrm{Ric}_N(y) := \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y) - \frac{S(y)^2}{N-n}, & \forall N \in (n, \infty). \\ \mathrm{Ric}_\infty(y) := \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y), \end{cases}$$

where $S(y)$ is the S Curvature at (x, y), $\mathrm{Ric}(y)$ is the Ricci curvature at (x, y).

Remark 1. Note that $\mathrm{Ric}_N(y)$ is a quadratic homogeneous function in y. Thus we say that $\mathrm{Ric}_N \geq c$ for some $c \in R$ if $\mathrm{Ric}_N(y) \geq cF(y)^2$ for all $y \in TM\backslash\{0\}$. If F is Riemannian metric, then S curvature vanishes identically, and the weight Ricci curvature reduces to Ricci curvature in Riemannian manifold.

1.1. On the generalized maximum principle on Finsler manifolds

Let $p \in M$ be any fixed point of a forward complete Finsler manifold M with dimension n. For $x \in M$, $r(x)$ is the distance function from p. Let $\gamma : [0, r] \to M$ be any unit speed geodesic from p to x. According to the result of Yau([9, 42]), define

$$K_\gamma(x) := \min_{0 \le k \le r(x)} \left\{ \frac{N-1}{r(x)-k} - \frac{1}{(r(x)-k)^2} \int_k^{r(x)} (t-k)^2 \mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt \right\}.$$

If x is not on the cut locus of p, then we can take γ to be the unique shortest geodesic from p to x and define $K(x) := K_\gamma(x)$. Otherwise, we define $K(x) := \min_\gamma K_\gamma(x)$, where γ ranges over all the minimal geodesics from p to x.

Theorem 0.1 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold. Let u be any non-constant C^2-function which is bounded from above on M. Then there exists a sequence of points $\{x_k\} \subset M_u$ such that*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} u(x_k) &= \sup_M u, \\ F(\nabla u)(x_k) &= \frac{2r(x_k)[u(x_k) - u(p) + 1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}, \\ \Delta u(x_k) &\le \frac{2\left(r(x_k)K(x_k)+1\right)\left[u(x_k) - u(p) + 1\right]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} \\ &\quad + \frac{4r^2(x_k)\left[u(x_k) - u(p) + 1\right]}{k^2(r^2(x_k)+2)^2(\log(r^2(x_k)+2))^2}, \end{aligned}$$

where $r(x) = d(p, x)$, p is a fixed point in M_u.

When (M, F) is a Riemannian manifold, Theorem 0.1 is Theorem 3 in[9]. According to the definition of Ricci curvature and Theorem 0.1, we get the following result.

Theorem 0.2 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold. Let u be any non-constant C^2-function bounded from above on M. If the weighted Ricci curvature Ric_N is bounded from below, then there exists a sequence $\{x_k\} \subset M_u$ such that*

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \ \lim_{k\to\infty} F(\nabla u)(x_k) = 0, \ \limsup_{k\to\infty} \Delta u(x_k) \le 0.$$

1.2. Applications of the generalized maximum principle on Finsler manifolds

In Riemannian manifolds, if u is a superharmonic function, then $-u$ is a subharmonic function. Thus, properties of superharmonic function are essentially the same as subharmonic function. However, in general, $\Delta(-u) \neq -\Delta u$ on Finsler manifolds. Therefore, we need to study properties of superharmonic function and subharmonic function, respectively.

Theorem 0.3 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold. Suppose that there exists a compact set such that the weighted Ricci curvature $Ric_N \geq c$ outside the compact set for some constant $c > 0$. Then there is no non-constant subharmonic(superharmonic) C^2-function bounded from above(below).*

Theorem 0.3 is similar to Corollary 2.1 of Yau in [9]: If M is a complete Riemannian manifold such that outside a compact set the Ricci curvature is bounded from below by $(\dim M + \varepsilon)/r^2$, where r is the distance from some fixed point and $\varepsilon > 0$ is a fixed constant, then M does not admit any non-constant positive superharmonic function.

According to Theorem 2 in [29], we give the following theorem.

Theorem 0.4 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with nonnegative weighted Ricci curvature Ric_N. If u is a C^2 function bounded from above, and satisfies*

$$\Delta u \geq cF(\nabla u),$$

then u is a constant, where c is a positive constant.

In addition, we have the following result by Theorem 0.2, it is an extension of the main result of [10].

Theorem 0.5 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with the weighted Ricci curvature Ric_N bounded from below. If u is a nonnegative C^2 function on M satisfying*

$$\Delta u \geq cu^t,$$

then u vanishes identically, where c is a positive constant, and $t > 1$.

2. Some Liouville-type theorems and uniqueness theorems on Finsler manifolds

The classical Liouville theorem states that every nonnegative (or bounded) harmonic function on $\mathbb{R}^n$ must be constant. Since the seventies of the last century, various Liouville theorems for harmonic (subharmonic) functions have been extensively studied on complete Riemannian manifolds. In addition, uniqueness theorems for heat equation in Riemannian manifold have attracted the interest of many mathematicians.

A natural question is how to generalize Liouville theorems for harmonic function and uniqueness theorems for heat equation on Riemannian manifolds to Finsler manifolds.

Since geometric objects depend on the direction on Finsler manifolds, and Finsler metric is not symmetric in general, that is, it is not reversible, we give the definition of the reversibility.

Let (M, F) be a Finsler manifold. We say F is reversible if $F(x, -y) = F(x, y)$ for any $y \in T_x M$. Generally, Finsler metric is not reversible, so we give the definition of the reversibility of (M, F) by([30])

$$\Lambda := \sup_{(x,y)\in TM\setminus\{0\}} \left\{ \frac{F(x,-y)}{F(x,y)} \right\}.$$

Obviously, F is reversible if and only if $\Lambda_F = 1$. And when F is Riemannian metric, the fundamental tensor is independent of the direction, then $\Lambda = 1$.

2.1. L^p-Liouville theorems for harmonic(subharmonic, superharmonic) functions on Finsler manifolds

Let (M, F, dm) be a Finsler manifold of dimension n with a volume measure dm and u be a nonnegative C^2 function. Fix a point $x_0 \in M$, for $r > 0$, $B_r^+(x_0)$ is a forward geodesic ball of radius r with center at x_0, and $V(r)$ is the volume of $B_r^+(x_0)$ with respect to dm. According to the result of [34], let

$$V_p(r) = \int_{B_r^+(x_0)} u^p dm$$

for $p \in \mathbb{R}$. Note that $V_p(r) = V(r)$ if $p = 0$, and u is a positive C^2 function for $p < 0$.

Theorem 0.6 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility and u be a nonnegative C^2 function. Assume that*

$$\int_1^{\infty} \frac{r}{V_p(r)} dr = \infty. \tag{0.0.6}$$

a) If $p \in [0, 1)$ and u is a nonnegative superharmonic function on M, then u is a constant.

b) If $p \in (1, \infty)$ and u is a nonnegative subharmonic function on M, then u is a constant.

c) If $p \in (-\infty, 0)$ and u is a positive superharmonic function on M, then u is a constant.

Remark 2. The theorem above is proved by Karp([16]) and Grigor'yan A.([3, 4]) in Riemannian manifolds, then Sturm([34]) extends it to Dirichlet space.

Remark 3. Obviously, the condition of Theorem 0.6 is satisfied if $u \in L^p(M)(p > 0$ and $p \neq 1)$ or

$$V(r) \leq Cr^2 \text{or} \quad V(r) \leq Cr^2 \log r,$$

where C is a positive constant. Therefore, we have the following corollaries which extend Theorem 3 of Yau in [43] and Corollary 1 of Cheng and Yau in [9], respectively.

Corollary 0.7 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility.*

a) If $p \in (0, 1)$, then every nonnegative superharmonic function $u \in L^p(M)$ is a constant. In particular, if $V(M) < \infty$, then every nonnegative superharmonic function on M is a constant.

b) If $p \in (1, \infty)$, then every nonnegative subharmonic function $u \in L^p(M)$ is a constant.

Corollary 0.8 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility. If, for some point $x_0 \in M$ and sequence $R_k \to +\infty$,*

$$V_p(R_k) \leq CR_k^2,$$

then we have the following results:

a) If $p \in (0,1)$, then every nonnegative superharmonic function $u \in L^p(M)$ is a constant. In particular, if $V(R_k) < C{R_k}^2$, then every nonnegative superharmonic function on M is a constant.

b) If $p \in (1,\infty)$, then every nonnegative subharmonic function $u \in L^p(M)$ is a constant.

Theorem 0.9 *Let (M,F,dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility and u be any positive function. Set $V_1(r) := \int_{B_r^+(x_0)} u dm$. If $\Delta \log u \geq 0$, and*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^2}{V_1(r)} = \infty, \tag{0.0.7}$$

then u is a constant. In particular, if $u \in L^1(M)$ and $\Delta \log u \geq 0$, then u is a constant.

Theorem 0.9 is a generalization of Theorem 1 and the results of the appendix of Yau in [43]: If the function u belongs to $L^p(p>0)$ on a complete Riemannian manifold satisfying $\Delta \log u = 0$, then u is a constant.

Remark 4. Note that we only study the case $p=1$ in Theorem 0.9. For the case $p \neq 1$, it is contained in the results of Theorem 0.6.

2.2. Gradient estimate for harmonic function on compact Finsler manifold without boundary

Since Finslerian objects depend on the direction, the gradient estimate is more complex on Finsler manifolds. Therefore, we study the gradient estimate on compact Finsler manifold without boundary.

Since the weighted Ricci curvature $Ric_N(x,y)$ is a homogeneous function in y, $\frac{1}{F^2(y)} Ric_N(x,y)$ is regarded as a function on the projective sphere bundle SM of M. Thus, if (M,F,dm) is a compact Finsler manifold without boundary, then $\frac{1}{F^2} Ric_N$ must be bounded. For such manifold, we have the following gradient estimate.

Theorem 0.10 *Let (M,F,dm) be a compact Finsler manifold without boundary of dimension n and u be a harmonic function on M. Then the lower bound*

K of Ric_N must be non-positive, and

$$F(x, \nabla u) \leq \sqrt{-(N-1)K}(u - \inf_M u).$$

Corollary 0.11 *Let (M, F, dm) be a compact Finsler manifold without boundary of dimension n and u be a harmonic function on M. If $Ric_N \geq 0$, then u is a constant.*

In particular, if (M, F) is a Riemannian manifold, the theorem above is reduced to the corresponding Liouville theorem in Riemannian geometry([42]).

2.3. Uniqueness theorems for the heat equation on Finsler manifolds

In 2009, Ohta and Sturm([24]) studied the nonlinear heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

on Finsler manifolds, where Δ is Finsler-Laplacian. They also gave the existence and regularity of the global and local solution([24]).

Given an open set $\Omega \subset M$, the Dirichlet energy of $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ is defined by ([25])

$$E_\Omega(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega F^2(\nabla u)dm.$$

If $\Omega = M$, then $E_\Omega = E_M$. Set

$$H^1(\Omega) := \{u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega) | E_\Omega(u) < \infty\},$$

and let $H^1_0(\Omega)$ be the closure of $C^\infty_c(\Omega)$ with respect to the (Minkowski) norm $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \|u\|_{L^2}(\Omega) + E_\Omega(u)^{\frac{1}{2}}$, $H^{-1}(\Omega)$ be the dual space of $H^1_0(\Omega)$.

In the following, we give the definition and the existence theorem of the global solution on Finsler manifolds([24]).

Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold. For $T > 0$, we say that a function u on $[0, T] \times M$ is a global solution of the heat equation if $u(x, t) \in L^2(H^1_0(M), [0, T]) \cap H^1(H^{-1}(M), [0, T])$ and if

$$\int_M \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dm = -\int_M d\varphi(\nabla u)dm,$$

holds for $t \in [0,T]$ and $\varphi \in C_c^\infty(M)$([24]Definition 3.1).

The condition $u(x,t) \in L^2(H_0^1(M),[0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M),[0,T])$ implies $u \in C(L^2(M),[0,T])$([24]).

In addition, Ohta and Sturm have given the existence and regularity theorem of the global solution ([24] Theorem 3.4): For each $u_0 \in H_0^1(M)$ and $T > 0$, there exists a global solution u of the heat equation on $M \times [0,T]$, and the distributional Laplacian $\Delta u(x,t)$ is absolutely continuous with respect to dm for all $t \in (0,T)$.

In the following, we give uniqueness theorem for L^p solutions($p > 1$) of the heat equation on Finsler manifolds, which extends the result of Peter Li([18]).

Theorem 0.12 *Let (M,F,dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility. For some $T > 0$ and $\forall t \in [0,T]$, assume u is a nonnegative function defined on $M \times [0,T]$ and $u(x,t) \in L^2(H_0^1(M),\ [0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M),[0,T])$ with $u(x,0) = 0$. If u satisfies*

$$\int_M \{\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + d\varphi(\nabla u)\} dm \leq 0, \quad \int_M u^p(x,t) dm < \infty,$$

for $p > 1$ and any nonnegative function $\varphi \in C_c^\infty(M)$, then $u(x,t) \equiv 0$ on $M \times [0,T]$.

In addition, Karp and Li([14]) proved that the bounded weak solution of the heat equation on complete Riemannian manifolds is uniquely determined by its initial data when $V(r) \leq e^{cr^2}$, where $V(r)$ is the volume of the geodesic ball. Later, T.Sturm and Grigor'yan A.([4, 34]) extended the condition of volume growth in the result of Karp and Li([14]) to the condition

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{\log V(r)} = \infty.$$

Grigor'yan A.([1]) generalized the condition of the theorems of T.Sturm([34]) and Grigor'yan A.([4]) to more general case. In the following, we will generalize the above results to Finsler manifolds.

Let (M,F,dm) be a forward complete Finsler manifold. For convenience, set $B_r := B_r^+(x_0)$, and $V(r)$ is the volume of B_r with respect to dm. According to the result of Grigor'yan A.([1] Theorem 11.9), we have the following result.

Theorem 0.13 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility, and $u(x,t)$ be a global solution of the heat equation on $M \times (0,T)$, and $u|_{t=0} = 0$ in the sense of $L^2_{col}(M)$. Assume that, for $x_0 \in M$ and for all $R > 0$,*

$$\int_0^T \int_{B_R} u^2(x,t)dmdt \leq \exp(f(R)),$$

where $f(r)$ is a positive increasing function on $(0,\infty)$ such that

$$\int^\infty \frac{rdr}{f(r)} = \infty.$$

Then $u(x,t) \equiv 0$ on $M \times (0,T)$.

If $u(x,t)$ is a bounded global solution of the heat equation on $M \times (0,T)$, $H := \sup|u| < \infty$ and $f(r) = \log H^2TV(r)$ in Theorem 0.13. Similar to the results of T.Sturm([34]) and Grigor'yan A.([4]), we have the following corollary.

Corollary 0.14 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility, and $u(x,t)$ be a bounded global solution of the heat equation on $M \times (0,T)$, and $u|_{t=0} = 0$ in the sense of $L^2_{col}(M)$. Assume*

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{\log V(r)} = \infty.$$

Then $u(x,t) \equiv 0$ on $M \times (0,T)$.

Obviously, $V(r) \leq e^{cr^2}$ satisfies the condition of above corollary, therefore, we generalize the theorem of Karp and Li([14]).

Corollary 0.15 *Let (M, F, dm) be a forward complete Finsler manifold with finite reversibility, and $u(x,t)$ be a bounded global solution of the heat equation on $M \times (0,T)$, and $u|_{t=0} = 0$ in the sense of $L^2_{col}(M)$. Assume*

$$V(r) \leq e^{cr^2}$$

for some constant c. Then $u(x,t) \equiv 0$ on $M \times (0,T)$.

第一章　Finsler几何基础知识

1.1　准备知识

本节里, 我们复习一些Finsler流形上的定义和性质. 参见[5, 30, 33]了解更多的细节.

在本节中, 指标约定为: 小写拉丁字母的取值范围为$\{1,\ldots,n\}$, 小写希腊字母的取值范围为$\{1,\ldots,n-1\}$, 并使用爱因斯坦求和约定.

设M是n维光滑流形, TM是其切丛. 在M上取局部坐标系(x^i), 则TM中的任意向量可表示为$y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 从而$(x^i,y^i)$构成$TM$上的局部坐标系. 记$TM$上的点为$(x,y)$. 流形$M$上的一个Finsler度量是定义在$TM$上的连续函数

$$F:TM\to[0,+\infty)$$

满足以下三条:

(1) (正则性) F在$TM\setminus\{0\}$上光滑;

(2)(正齐次性) 对任意实数$\lambda>0$, 有$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$;

(3) (强凸性) 基本二次型$g=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j$正定, $g_{ij}:=\frac{1}{2}(F^2)_{y^iy^j}$.

若对任意的$y\in T_xM$, M上的Finsler度量F满足$F(x,-y)=F(x,y)$, 则称F是可反的. 一般情况下, Finsler度量不具有可反性.

在点$(x,y)\in TM\setminus\{0\}$上定义

$$\begin{aligned}
C_{ijk}&:=\frac{1}{4}\frac{\partial^3F^2(x,y)}{\partial y^i\partial y^j\partial y^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k},\\
\gamma^i_{jk}&:=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right),\\
N^i_j&:=\gamma^i_{jk}y^j-C^i_{jk}\gamma^k_{rs}y^ry^s,\\
\frac{\delta}{\delta x^i}&:=\frac{\partial}{\partial x^i}-N^j_i\frac{\partial}{\partial y^j},\\
\delta y^i&:=dy^i+N^i_jdx^j,\\
\Gamma^i_{jk}&:=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\delta g_{jl}}{\delta x^k}+\frac{\delta g_{kl}}{\delta x^j}-\frac{\delta g_{jk}}{\delta x^l}\right).
\end{aligned}$$

设$\pi : TM \to M$为丛投影. 陈联络是定义在拉回丛π^*TM上的联络, 它由以下结构方程确定:

(1) 无挠: $dx^j \wedge \omega_j^i = 0$;

(2) 几乎与度量相容: $dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 2C_{ijk}\delta y^k$.

若记$\omega_j^i = \Gamma^i_{jk}dx^k$, 那么$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

陈联络对应的曲率2-形式定义为

$$\Omega_j^i := \mathrm{d}\,\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i =: \frac{1}{2}R^i_{j\,kl}\,\mathrm{d}\,x^k \wedge \mathrm{d}\,x^l + P^i_{j\,kl}\,\mathrm{d}\,x^k \wedge \delta y^l.$$

$R^i_{j\,kl}$称为陈-黎曼曲率张量, $P^i_{j\,kl}$称为陈-非黎曼曲率张量. 通过计算我们得到

$$R^i_{j\,kl} = \frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{jk}.$$

令$R_{jikl} := g_{is}R^s_{j\,kl}$, 固定任意一点$(x,y) \in TM\backslash\{0\}$, 设$T_xM$中包含$y$的2维平截面$\Pi_y = span\{y, V\}$, $y = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么, 以$y$为旗杆的$\Pi_y$的旗曲率定义为

$$\mathbf{K}(\Pi_y) := \frac{V^i y^j R_{jikl} y^l V^k}{g_y(y,y)g_y(V,V) - [g_y(y,V)]^2}.$$

当F是黎曼度量时, g_{ij}和R_{jikl}均与方向y无关, 上式就是Π_y的截面曲率. 令

$$R^i_k := y^j R^i_{j\,kl} y^l, \quad R_{jk} = g_{ij}R^i_k.$$

我们称R^i_k或R_{jk}为黎曼曲率张量或黎曼曲率. 在T_xM上选取关于g_y-幺正基, $\{e_1, \ldots, e_n\}$且$y = e_n$. 我们定义Finsler流形在点(x,y)的Ricci曲率为

$$\mathbf{Ric}(y) := \sum_\alpha K(y, e_\alpha) = g^{jk}R_{jk} = R^k_k.$$

以下我们用到的联络都是陈联络, 用∇表示.

设$\gamma(t)$是M上的一条可微曲线, $V = V^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}$是沿$\gamma(t)$的可微向量场. 令$T = \gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}$, 则$V(t)$沿$\gamma(t)$的共变导数定义为

$$\nabla^T_T V(t) = \left\{\frac{dV^i}{dt} + V^j T^k \Gamma^i{}_{jk}(\gamma(t), \gamma'(t))\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}.$$

若$\gamma(t)$满足

$$\nabla^T_T T = 0,$$

则称 $\gamma(t)$ 是一条测地线.

设$G^i = G^i(x,y)$是Finsler流形上的喷射系数, $G^i := \frac{1}{4}g^{il}\left\{[F^2]_{x^ky^l}y^k - [F^2]_{x^l}\right\}$. 通过计算我们以得到$G^i(x,y) = \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{jk}(x,y)y^jy^k$. 从而可得 $\gamma(t)$ 是M上的测地线当且仅当在局部坐标系下满足

$$(\gamma^i(t))'' + 2G^i(\gamma(t),\gamma'(t)) = 0.$$

对任意的$y \in T_xM\backslash\{0\}$, 设$\gamma(t)$是一条满足$\gamma(0) = x$和$\gamma'(0) = y$的测地线, 则$F$的畸变定义为

$$\tau(x,y) := \log\left\{\frac{\sqrt{det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma(x)}\right\},$$

F的S-曲率S定义为

$$S(x,y) := \frac{d}{dt}[\tau(\gamma(t),\gamma'(t))]_{t=0}.$$

我们还可以定义

$$\dot{S}(x,y) := \frac{d}{dt}[S(\gamma(t),\gamma'(t))]_{t=0}.$$

我们定义带权的 Ricci 曲率(weighted Ricci curvature)为([30])

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}_n(y) := \begin{cases} \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y), & \text{当} S(y) = 0, \\ -\infty & \text{当} S(y) \neq 0, \end{cases} \\ \mathrm{Ric}_N(y) := \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y) - \frac{S(y)^2}{N-n}, \quad \forall N \in (n,\infty). \\ \mathrm{Ric}_N(y) := \mathrm{Ric}(y) + \dot{S}(y), \end{cases}$$

其中 $S(y)$ 表示 S 曲率在 (x,y) 取值, $\mathrm{Ric}(y)$ 表示在 (x,y) 的关于 F 的 Ricci 曲率.

注意, 这里的 $\mathrm{Ric}_N(y)$ 关于 y 是二次齐次的, 即, 对 $c \in R$, $\mathrm{Ric}_N \geq c$ 是指 $\mathrm{Ric}_N(y) \geq cF(y)^2$. 当$F$是黎曼度量时, S 曲率消失, 此时, 带权的Ricci曲率就为黎曼流形上的Ricci曲率.

定义 x 点的指数映射为

$$\exp(x,y) := \begin{cases} \gamma(1,x,y) & y \in T_xM\backslash\{0\}, \\ x & y = 0, \end{cases}$$

其中 $\gamma(t,x,y)$ 是一条测地线, 使得 $\gamma(0,x,y) = x$, $\gamma'(0,x,y) = y$. 对任意 $y \in S_xM = \{y \in T_xM | F(y) = 1\}$, 定义 y 的割值为

$$i_y := \sup\{r | \exp_x(ty),\ 0 < t < r,\ \text{是单射}\}.$$

x 的单射半径定义为

$$\mathrm{i}_x := \inf_{y \in S_x M} i_y.$$

M 的单射半径定义为 $\mathrm{i}_M := \inf_{x \in M} \mathrm{i}_x$.

x 的割迹定义为

$$Cut_x := \{\exp_x(i_y y) | y \in S_x M\}.$$

对$x_0, x_1 \in M$, x_0到x_1的距离函数定义为

$$d(x_0, x_1) = \inf_{\eta} \int_0^1 F(\eta'(t)) dt,$$

其中下确界取遍所有$\eta(0) = x_0$且$\eta(1) = x_1$的C^1-曲线$\eta : [0,1] \to M$. 注意, Finsler流形上的距离函数一般是不具有对称性. 当F是可反的时, 距离函数是对称的. 以x_0为心, r为半径的向前测地球定义为

$$B_r^+(x_0) := \{x \in M | d(x_0, x) < r\}.$$

如果 (M, F) 中一个点列 $\{x_n\}$ 满足: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $j \geq i > N$时, 有 $d(x_i, x_j) < \epsilon$ $(d(x_j, x_i) < \epsilon)$, 则称 $\{x_n\}$ 是向前(向后) Cauchy 列. 如果 (M, F) 中任意向前(向后) Cauchy 列都在 M 中收敛, 那么 M 称为向前(向后)完备的.

对$p \in M$, 设$r(\cdot) = d(p, \cdot)$是从p点出发的距离函数, 则我们有以下结果.

引理 1.1 ([5]). *设(M, F)是一个Finsler流形, 函数$r^2(\cdot) = d^2(p, \cdot)$是*

(a)在去掉p领域里是C^∞的,

(b)在p点是C^1的, 且具有零导数,

(c) 在p点是C^2的充要条件是F在T_pM上是黎曼的.

设 $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq r$, 为一条测地线, 令 $T := \gamma'(t)$. 沿 $\gamma(t)$ 的指标形式(index form)定义为

$$I(V, W) := \int_0^r \left[g_T(\nabla_T^T V, \nabla_T^T W) + R_T(V, T, W, T) \right] dt,$$

其中 V, W 为 $\gamma(t)$ 上的任意两个向量场. 设 J 是沿 $\gamma(t)$ 的一个向量场. 如果它满足以下Jacobi方程

$$\nabla_T^T \nabla_T^T J + R_T(J, T) T = 0,$$

那么称 J 是一个Jacobi场, 其中 $R_T(J,T)T := T^j R^i_{j\,kl} T^l V^k \frac{\partial}{\partial x^i}$. 设 $p=\gamma(0), q=\gamma(r)$. 如果 $\gamma(t)$ 上存在一非零Jacobi场使得在 p,q 两点都为零, 那么称 q 是 p (沿 γ) 的共轭点. 对向量 $y \in S_xM$, y 的共轭值定义为

$$c_y := \sup\{r | \exp_x ty \text{不是} x \text{的共轭点}, 0 \le t \le r, \}.$$

我们有以下指标引理([5]).

引理 1.2 (指标引理). *设 $\gamma(t)$, $0 \le t \le r$, 是Finsler流形上的一条测地线, 且 $\gamma(t)$, $0 < t \le r$, 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点. J 是 $\gamma(t)$ 上的一Jacobi场. W 为 $\gamma(t)$ 上的一向量场. 如果 $W(0)=J(0)$, $W(r)=J(r)$, 那么 $I(W,W) \ge I(J,J)$, 等号成立的充要条件是 $W=J$.*

定义Legender变换 $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ 为

$$\mathcal{L}(y) := \begin{cases} g_y(y,\cdot) & y \in TM\backslash\{0\}, \\ 0 & y = 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

对任意的 $\xi \in T^*M\backslash\{0\}$, Finsler度量 F 的对偶度量 F^* 定义为

$$F^*(\xi) := \sup_{y\in TM\backslash\{0\}} \frac{\xi(y)}{F(y)}.$$

我们可以证明对任意的 $y \in TM\backslash\{0\}$, $\xi = \mathcal{L}(y)$, 有 $F(y) = F^*(\xi) = \frac{\xi(y)}{F(y)}$. 并且Legendre变换 $\mathcal{L}$ 是 $TM\backslash\{0\}$ 到 $T^*M\backslash\{0\}$ 的微分同胚([30]), 因此存在 $\mathcal{L}$ 的逆变换 $\mathcal{L}^{-1} : T^*M\backslash\{0\} \to TM\backslash\{0\}$.

利用Legendre变换, 我们可以定义函数的梯度. 给定函数 $u \in C^2(M)$, u 在 x 点的梯度向量场([30])

$$\nabla u(x) := \mathcal{L}^{-1}(du(x)) \in T_xM.$$

在局部坐标下, ∇u 表示为

$$\nabla u := \begin{cases} g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} & x \in M_u, \\ 0 & x \in M \setminus M_u. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中 $M_u = \{x \in M | du(x) \neq 0\}$. 一般情况下, ∇u 在 M 上只是连续的, 但在 M_u 上是光滑的, 并且 $\nabla(-u) \neq -\nabla u$.

设$dm = \sigma(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$是$(M,F)$的某个体积形式(体积元), $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$是$(M,F)$上无奇点的可微向量场, 则$X$关于$dm$的散度$\mathrm{div}_\sigma X$可定义为(参考[33],§2.4)

$$(\mathrm{div}_\sigma X)dm := d(X\rfloor dm).$$

其中$X\rfloor$表示关于X的内微分. 直接计算可得

$$\mathrm{div}_\sigma X = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma X^i).$$

Finsler流形上函数u的Laplacian定义为

$$\Delta u := \mathrm{div}_\sigma(\nabla u).$$

在局部坐标下, Δu在M_u上可以表示为

$$\Delta u = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x^j}). \tag{1.1.3}$$

由于 Legendre 变换是非线性变换, 因此, Finsler-Laplacian 是一个非线性的二阶椭圆算子([35]), 并且它在 M_u 是光滑的, 而在 $M\backslash M_u$ 上无法用(1.1.3)定义, 故在一般情形下, 我们都考虑其在分布意义下的定义([25, 33]), 即, 对 $u \in H^1_{loc}(M)$, $\forall\varphi \in C^\infty_c(M)$ 有

$$\int_M \varphi\Delta u dm := -\int_M d\varphi(\nabla u)dm.$$

另外, 由于 Finsler 流形上的散度依赖于体积元的选取, 通过不同的体积元我们可以定义不同的 Laplacian. 从(1.1.3)我们还可以看出$\Delta(-u) \neq -\Delta u$, 因此, Finsler流形上需要分别讨论下调和函数和上调和函数的性质. 可见, Finsler-Laplacian 与黎曼流形上的 Laplacian 有本质的区别. 然而, 当 F 是黎曼度量时, Finsler-Laplacian 就是黎曼流形上的 Laplacian.

假设 u 是 M 上的 C^2 函数, 若 u 满足 $\Delta u = (\geq,\leq)0$, 则称 u 是 M 上的 Finsler 调和(下调和,上调和)函数. 由于 Δu 在 $M\backslash M_u$ 上几乎处处为零([25]), 所以若 u 是 M 上的 Finsler 调和(下调和,上调和)函数, 则 u 在分布意义下也是 M 上的调和(下调和,上调和)函数.

给定一个向量场V, 使得在M_u上$V \neq 0$, 带权黎曼流形(M, g_V)上带权的梯度向量场和带权的Laplacian[25]定义为

$$\nabla^V u := \begin{cases} g^{ij}(V)\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} & x \in M_u, \\ 0 & x \in M\backslash M_u, \end{cases} \qquad \Delta^V u := \mathrm{div}_\sigma(\nabla^V u).$$

注意$\nabla^{\nabla u}u = \nabla u$且$\Delta^{\nabla u}u = \Delta u$.

对$\forall X, Y \in TM$, 在M_u上u的Hessian $H(u)$定义为([30],§5.1)

$$H(u)(X,Y) := XY(u) - \nabla_X^{\nabla u}Y(u),$$

其中$\nabla^{\nabla u}$表示陈联络∇在方向∇u取值. 由陈联络的性质易得

$$H(u)(X,Y) = \langle \nabla_X^{\nabla u}\nabla u, Y\rangle_{g_{\nabla u}} = \langle \nabla_Y^{\nabla u}\nabla u, X\rangle_{g_{\nabla u}} = H(u)(Y,X).$$

引理 1.3 ([30]). *设(M,F,dm)是一个具有体积形式dm的n维Finsler流形, $u = u(x)$是M上的可微函数, 那么, 在M_u上我们有*

$$\Delta u = tr_{g_{\nabla u}}H(u) - S(\nabla u),$$

其中S是关于体积形式dm的S曲率.

对M上的一个光滑向量场V及$x \in M_V := \{x \in M | V(x) \neq 0\}$, 我们可以定义$\nabla V(x) \in T_x^*M \otimes T_xM$([30],§11.4)

$$\nabla V(X) := \nabla_X^V V(x) = X^j \left\{ \frac{\partial V^i}{\partial x^j}(x) + \Gamma_{jk}^i(x,V)V^k(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM, \quad X \in T_xM,$$

其中∇^V表示陈联络在V上的限制. 对M上的可微函数$u = u(x)$, 在M_u上我们令

$$\nabla^2 u := \nabla(\nabla u).$$

设$\{e_a\}_{a=1}^n$是M_u上关于$g_{\nabla u}$的局部正交基, ω^a为其对偶基, 我们有

$$\nabla^2 u = \Sigma u_{a|b} e_a \otimes \omega^b,$$

其中"|"表示关于陈联络的水平导数. 容易验证

$$u_{a|b} = u_{b|a}.$$

引理 1.4 ([25]). *设(M,F,dm)是一个Finsler流形. 对$u \in C^\infty(M)$及$N \in [n,\infty]$, 在M_u上逐点有*

$$\Delta^{\nabla u}\left(\frac{F(\nabla u)^2}{2}\right) - D(\Delta u)(\nabla u) = Ric_\infty(\nabla u) + \|\nabla^2 u\|_{HS(\nabla u)}^2$$

和

$$\Delta^{\nabla u}\left(\frac{F(\nabla u)^2}{2}\right) - D(\Delta u)(\nabla u) \geq Ric_N(\nabla u) + \frac{(\Delta u)^2}{N}.$$

这里$\|\nabla^2 u\|_{HS(\nabla u)}^2$表示关于$g_{\nabla u}$的Hilbert-Schmidt模.

引理 1.5 ([33]). 设(M, F, dm)是一个紧的定向的Finsler流形, ν是∂M的外法向量, 则对M上任意的光滑向量场X有

$$\int_M div_\sigma(X)dm = \int_{\partial M} g_\nu(x, \nu)dA_F.$$

特别地, 若M是闭的定向的流形, 则

$$\int_M div_\sigma(X)dm = 0,$$

其中dA_F是m在∂M上诱导的体积形式.

下面给出Finsler流形上的可反系数的定义.

定义 1.1 ([33]). 设(M, F)是一个Finsler流形, (M, F)的可反系数定义为

$$\Lambda := \sup_{(x,y)\in TM\setminus\{0\}} \left\{ \frac{F(x, -y)}{F(x, y)} \right\}$$

显然, $\Lambda \geq 1$, 且$\Lambda = 1$当且仅当F是可反的, 即, $F(x, -y) = F(x, y)$. 此外, 若$\Lambda < \infty$, 则

$$\frac{1}{\Lambda}F(x, y) \leq F(x, -y) \leq \Lambda F(x, y). \tag{1.1.4}$$

第二章 Finsler流形上的广义极值原理及其应用

本章中, 我们首先把黎曼流形上的广义极值原理推广到Finsler流形上, 并利用它研究向前完备的Finsler流形中调和(下或上调和)函数的Liouville定理. 其次, 给出Finsler流形上带权Ricci曲率条件下体积比较定理的一种简单证明方法, 简化了Ohta在文献[22]中的证明过程.

2.1 Finsler流形上的广义极值原理

在本章里, 我们总假定(M, F, dm)是一个带有体积测度$dm = \sigma(x)dx$的向前完备Finsler流形. 给定点$p \in M$, 对任意的$x \in M$, 记$r(x)$是从p点出发的距离函数. 设$\gamma : [0, r] \to M$是从p到x的单位极小测地线. 类似于 Yau 在文献 [9, 42] 中的工作, 令

$$K_\gamma(x) := \min_{0 \le k \le r(x)} \left\{ \frac{N-1}{r(x)-k} - \frac{1}{(r(x)-k)^2} \int_k^{r(x)} (t-k)^2 \mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt \right\}. \tag{2.1.1}$$

若x在p的割迹内, 我们取γ为从p到x的唯一的极小测地线, 并定义$K(x) := K_\gamma(x)$. 否则, 我们定义$K(x) := \min_\gamma K_\gamma(x)$, 其中$\gamma$取遍所有从$p$到$x$的极小测地线.

引理 2.1. *设(M, F, dm)是一个n维的Finsler流形, x是M上从$p \in M$出发有极小测地线相连的点. 若x不在p的割迹上, 则有*

$$\Delta r(x) \le K(x).$$

证明. 设$\gamma : [0, l] \to M$是长度为$l = r(x)$, 从p到x的单位极小测地线, $e_1, e_2, \cdots, e_n = \gamma'(0)$是$(T_pM, g_{\gamma'(0)})$上的正交基. 令$E_1(t), E_2(t), \cdots, E_n(t) = \gamma'(t)$是沿$\gamma(t)$的平行向量场, 使得$E_i(0) = e_i$, 且$\{J_i(t)\}$是唯一的在$\gamma(0)$点为零的Jacobi场, 使

得$J_i(l) = E_i(l)$, 则

$$\begin{aligned}\Delta r &= tr_{\nabla r} H(r) - S(\nabla r) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} H(r)(E_i(l), E_i(l)) - S(\nabla r) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} I_\gamma(J_i, J_i) - S(\nabla r).\end{aligned}$$

令

$$f(t) := \begin{cases} 0 & 0 \le t \le l-k, \\ \frac{t-k}{l-k} & t \ge k. \end{cases}$$

$$W_i(t) := f(t)E_i(t).$$

显然, $W_i(0) = J_i(0)$, $W_i(l) = J_i(l)$. 由指标引理我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} I_\gamma(J_i, J_i) &\le \sum_{i=1}^{n-1} I_\gamma(W_i, W_i) \\ &= \int_0^l \{(n-1)[f'(t)]^2 - f^2(t)\mathrm{Ric}(\gamma'(t))\}dt \\ &= \frac{(n-1)}{(l-k)} - \int_k^l \frac{(t-k)^2}{(l-k)^2}\mathrm{Ric}(\gamma'(t))dt.\end{aligned}$$

因此, 我们有

$$\Delta r(x) \le \frac{(n-1)}{r(x)-k} - \frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r (t-k)^2 \mathrm{Ric}(\gamma'(t))dt - S(\nabla r(x)). \quad (2.1.2)$$

由带权Ricci曲率的定义可得

$$\mathrm{Ric}(\gamma'(t)) = \mathrm{Ric}_N(\gamma'(t)) - S'(\gamma'(t)) + \frac{1}{N-n}S^2(\gamma'(t)).$$

令A是(2.1.2)的最后两项, 则

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r (t-k)^2[\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t)) - S'(\gamma'(t)) + \frac{S^2(\gamma'(t))}{N-n}]dt - S(\nabla r(x)) \\
&= -\frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r \left\{(t-k)^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t)) + \left(\frac{(t-k)^2}{N-n}S^2 + 2(t-k)S\right)\right\} dt \\
&= -\frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r (t-k)^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt \\
&\quad -\frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r \left(\left(\frac{(t-k)S}{\sqrt{N-n}} + \sqrt{N-n}\right)^2 - (N-n)\right) dt \\
&\le -\frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r (t-k)^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt + \frac{N-n}{r(x)-k}. \qquad (2.1.3)
\end{aligned}$$

由(2.1.2)和(2.1.3)可以得到

$$\Delta r(x) \le \frac{N-1}{r(x)-k} - \frac{1}{(r(x)-k)^2}\int_k^r (t-k)^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt. \qquad (2.1.4)$$

因此, 对$x \in M/Cut(p)$, (2.1.4)成立. 引理2.1证毕. □

推论 2.2. *设(M,F,dm)是一个向前完备的Finsler流形. 对常数c, 若$Ric_N \ge c$, 则$\Delta r(x)$有上界.*

证明. 从(2.1.1)和$\mathrm{Ric}_N \ge c$ 我们可以得到

$$\begin{aligned}
K(x) &= \min_{0\le k\le r}\left\{\frac{N-1}{r-k} - \frac{1}{(r-k)^2}\int_k^r (t-k)^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt\right\} \\
&\le \min_{0\le k\le r}\left\{\frac{N-1}{r-k} - \frac{c}{(r-k)^2}\int_k^r (t-k)^2 dt\right\} \\
&= \min_{0\le k\le r}\left\{\frac{N-1}{r-k} - \frac{c}{3}(r-k)\right\}.
\end{aligned}$$

设$r-k=s$, 则$0\le s\le r$. 令$f(s) = \frac{N-1}{s} - \frac{c}{3}s$.

(1) 若$c<0$, 我们有

$$f(s) \ge 2\sqrt{\frac{-c(N-1)}{3}}.$$

因此,

$$\min_{0\le k\le r}\{\frac{N-1}{r-k} - \frac{c}{3}(r-k)\} = 2\sqrt{\frac{-c(N-1)}{3}},$$

即

$$K(x) \le 2\sqrt{\frac{-c(N-1)}{3}}.$$

(2) 若$c \ge 0$, 则

$$f'(s) = -\frac{N-1}{s^2} - \frac{c}{3} < 0.$$

因此, $f(s)$是单调减的, 并且$\min\limits_{0\le s\le r} f(s) = \frac{N-1}{r} - \frac{c}{3}r$. 令$h(r) := \frac{N-1}{r} - \frac{c}{3}r$. 显然$h(r)$也是单调减的. 当$r \ge 1$, 我们有$h(r) \le N - 1 - \frac{c}{3}$. 当$0 < r \le 1$, 我们有$\min\limits_{0<r\le 1} h(r) = N - 1 - \frac{c}{3}$. 因此,

$$K(x) \le N - 1 - \frac{c}{3}.$$

推论2.2证毕. □

下面, 我们将利用带权的梯度和带权的Laplacian来证明Finsler流形上的广义极值原理.

定理 2.3. *设(M, F, dm)是一个向前完备的Finsler流形, u是M上非常值的有上界的C^2函数, 则存在序列$\{x_k\} \subset M_u$, 使得*

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \tag{2.1.5}$$

$$F(\nabla u)(x_k) = \frac{2r(x_k)[u(x_k) - u(p) + 1]}{k(r^2(x_k) + 2)\log(r^2(x_k) + 2)}, \tag{2.1.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta u(x_k) \le\ & \frac{2\left(r(x_k)K(x_k) + 1\right)\left[u(x_k) - u(p) + 1\right]}{k(r^2(x_k) + 2)\log(r^2(x_k) + 2)} \\ & + \frac{4r^2(x_k)\left[u(x_k) - u(p) + 1\right]}{k^2(r^2(x_k) + 2)^2(\log(r^2(x_k) + 2))^2},\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

其中$r(x) = d(p, x)$, p是M_u中一个固定点, $K(x)$由(2.1.1)给出.

证明. 因为u是M上非常值的函数, 故存在$p \in M$, 使得$du(p) \ne 0$. 设$\gamma : [0, l] \to M$是从p到x长度为$l = r(x)$的单位极小测地线. 对任意固定的$k > 0$, 设

$$G_k(x) = \frac{u(x) - u(p) + 1}{(\log(r^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}}}. \tag{2.1.8}$$

由于$G_k(p) = \frac{1}{(\log 2)^{\frac{1}{k}}}$, 并且$\limsup\limits_{r\to\infty} G_k(x) \le 0$, 故$G_k(x)$一定在$M$中的某一点$x_k$达到它的极大值. 由$x_k$ 的性质我们可以得到$G_k(x_k) \ge G_k(p) > 0$, 从而可得

$$u(x_k) - u(p) + 1 > 0.$$

Step 1. 我们先证(2.1.6)和(2.1.7).

下面我们将分两类情况证明(2.1.6)和(2.1.7).

Case 1. 假定x_k不是p的割点, 我们可以在x_k点对$G_k(x)$微分. 由x_k是$G_k(x)$的极大值点可得

$$dG_k(x_k) = 0,$$

即

$$du(x_k) = \frac{u(x_k) - u(p) + 1}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} d(r^2)(x_k). \tag{2.1.9}$$

因为$du(p) \ne 0$, 由引理1.1和(2.1.9)我们很容易得到$x_k \ne p$. 所以, 我们可以简化(2.1.9)

$$du(x_k) = \frac{2r(x_k)[u(x_k) - u(p) + 1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} dr(x_k). \tag{2.1.10}$$

从(2.1.10)我们得到$du(x_k) \ne 0$, 即, $x_k \in M_u$. 由(2.1.10)我们还可以得到$\nabla^{\nabla u} r(x_k) = \nabla r(x_k)$ 和$\Delta^{\nabla u} r(x_k) = \Delta r(x_k)$.

由带权黎曼流形$(M, g_{\nabla u})$上的极值原理及$G_k(x)$在x_k点达到极大值, 我们有

$$\nabla^{\nabla u} G_k(x_k) = 0 \tag{2.1.11}$$

和

$$\Delta^{\nabla u} G_k(x_k) \le 0. \tag{2.1.12}$$

令$A(x) = \log(r^2(x)+2)$. 由于

$$\mathrm{div}_\sigma(f\nabla^{\nabla u} h) = f\Delta^{\nabla u} h + g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u} f, \nabla^{\nabla u} h) \qquad x \in M_u,$$

从而有

$$\begin{aligned} \nabla^{\nabla u} G_k(x) &= g^{ij}(\nabla u)\frac{\partial G_k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \frac{\nabla u}{A^{\frac{1}{k}}} - \frac{2r(x)\nabla^{\nabla u} r\,[u(x) - u(p) + 1]}{kA^{\frac{k+1}{k}}(r^2+2)} \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

和

$$\begin{aligned}\Delta^{\nabla u}G_k(x) &= \frac{\Delta u}{A^{\frac{1}{k}}} - \frac{4r(x)\langle\nabla^{\nabla u}r, \nabla u\rangle_{\nabla u}}{kA^{\frac{k+1}{k}}(r^2+2)} - \frac{2r(x)\Delta^{\nabla u}r\,[u(x)-u(p)+1]}{kA^{\frac{k+1}{k}}(r^2+2)} \\ &+ \langle\nabla^{\nabla u}r, \frac{4(k+1)}{k^2}\frac{r^2(x)\,[u(x)-u(p)+1]}{A^{\frac{2k+1}{k}}(r^2+2)^2}\nabla^{\nabla u}r\rangle_{\nabla u} \\ &+ \langle\nabla^{\nabla u}r, \frac{4r^2\,[u(x)-u(p)+1]}{kA^{\frac{k+1}{k}}(r^2+2)^2}\nabla^{\nabla u}r\rangle_{\nabla u} \\ &- \langle\nabla^{\nabla u}r, \frac{2\,[u(x)-u(p)+1]}{kA^{\frac{k+1}{k}}(r^2+2)}\nabla^{\nabla u}r\rangle_{\nabla u}. \qquad (2.1.14)\end{aligned}$$

由(2.1.11)和(2.1.13)我们得到

$$\nabla u(x_k) = \frac{2r(x_k)\,[u(x_k)-u(p)+1]}{kA(r^2(x_k)+2)}\nabla r(x_k). \qquad (2.1.15)$$

由(2.1.15)可得

$$g_{\nabla u}(\nabla r, \nabla r)(x_k) = g_{\nabla r}(\nabla r, \nabla r)(x_k) = 1.$$

因此,

$$F(\nabla u)(x_k) = \frac{2r(x_k)[u(x_k)-u(p)+1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}.$$

把(2.1.14)和(2.1.15)代入(2.1.12)可得

$$\begin{aligned}\Delta u(x_k) \le & \frac{4r(x_k)\langle\nabla r, \nabla u\rangle_{\nabla u}(x_k)}{kA(r(x_k)^2+2)} + \frac{2\,[u(x_k)-u(p)+1]}{kA(r(x_k)^2+2)}(r(x_k)\Delta r(x_k)+1) \\ & - \frac{4(k+1)}{k^2}\frac{r^2(x_k)\,[u(x_k)-u(p)+1]}{A^2(r^2(x_k)+2)^2} - \frac{4r^2\,[u(x_k)-u(p)+1]}{kA(r^2(x_k)+2)^2}.\end{aligned}$$

由(2.1.15)和引理2.1可得

$$\begin{aligned}\Delta u(x_k) \le & \frac{2\,[u(x_k)-u(p)+1]}{kA(r(x_k)^2+2)}(r(x_k)K(x_k)+1) \\ & + \frac{4(1-k)}{k^2}\frac{r^2(x_k)\,[u(x_k)-u(p)+1]}{A^2(r^2(x_k)+2)^2} - \frac{4r^2\,[u(x_k)-u(p)+1]}{kA(r^2(x_k)+2)^2}. \qquad (2.1.16)\end{aligned}$$

因此, (2.1.16)可以简化为

$$\Delta u(x_k) \le \frac{2\,[u(x_k)-u(p)+1]}{kA(r^2(x_k)+2)}(r(x_k)K(x_k)+1) + \frac{4r^2(x_k)\,[u(x_k)-u(p)+1]}{k^2A^2(r^2(x_k)+2)^2}.$$

Case 2. 假定x_k在p的割迹上. 在$\gamma(t)(t\in[0,l])$内固定一点$\bar{p}$, 则x_k不是$\bar{p}$ 的共轭点. 设$N_{\bar{p}}$是从$\bar{p}$到x_k测地线段$\gamma(t)$的正则领域, 使得对任意$x\in N_{\bar{p}}$, 至多有一条极小测地线连接$\bar{p}$和x.

对$x\in N_{\bar{p}}$, 令$\bar{r}(x):=d(\bar{p},x)$. 显然, $\bar{r}$在x_k的领域内是光滑的. 令$\delta=r(\bar{p})=d(p,\bar{p})$, 则由三角不等式可得

$$d(p,\bar{p})+d(\bar{p},x)\geq d(p,x),$$

即

$$\delta+\bar{r}(x)\geq r(x). \tag{2.1.17}$$

沿测地线$\gamma(t)$我们还可以得到

$$d(p,\bar{p})+d(\bar{p},x_k)=d(p,x_k),$$

即

$$\delta+\bar{r}(x_k)=r(x_k). \tag{2.1.18}$$

定义

$$\bar{G}_k(x):=\frac{u(x)-u(p)+1}{(\log((\bar{r}(x)+\delta)^2+2))^{\frac{1}{k}}}.$$

由(2.1.17)和(2.1.18)可得

$$\bar{G}_k(x)\leq G_k(x)\leq G_k(x_k)=\bar{G}_k(x_k),\ \forall x\in N_{\bar{p}}.$$

因此x_k也是$\bar{G}_k$的极大值点. 在x_k点应用带权黎曼流形$(M,g_{\nabla u})$上极大值原理可得

$$\nabla^{\nabla u}\bar{G}_k(x_k)=0$$

和

$$\Delta^{\nabla u}\bar{G}_k(x_k)\leq 0.$$

类似于Case 1且让$\delta\to 0$, 我们得到(2.1.6)和(2.1.7).

Step 2. 下面我们用反证法证明(2.1.5). 若它不成立, 我们取$\varepsilon>0$和$x\in M$, 使得对充分大的k满足

$$u(x)>u(x_k)+\varepsilon. \tag{2.1.19}$$

若当$k \to \infty$时, $r(x_k) \to \infty$, 即存在x_k的某个子列(仍记为x_k), 使得当k充分大时有$r(x_k) > r(x)$. 因此我们可以得到

$$G_k(x) = \frac{u(x) - u(p) + 1}{(\log(r^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}}} > \frac{u(x_k) - u(p) + 1}{(\log(r^2(x_k) + 2))^{\frac{1}{k}}} = G_k(x_k).$$

这与x_k的定义矛盾

若对某个序列k, x_k收敛到一点$\bar{x}$, 则由(2.1.19)可得

$$u(x) \geq u(\bar{x}) + \varepsilon.$$

另一方面, 由于$G_k(x) \leq G_k(x_k)$, 故有

$$u(\bar{x}) - u(x_0) + L = \lim_{k\to\infty} G_k(x_k) \geq \lim_{k\to\infty} G_k(x) = u(x) - u(x_0) + L,$$

从而有

$$u(\bar{x}) \geq u(x).$$

这与假设矛盾. 定理2.3证毕. □

当 (M, F) 是黎曼流形时, 定理2.3即为 Yau 在文献 [9] 中的定理 3. 由推论2.2及定理2.3, 我们可以得到以下结果.

定理 2.4. *设(M, F, dm)是一个向前完备的Finsler流形, u是M上非常值的有上界C^2函数. 若Ric_N有下界, 则存在点列$\{x_k\} \subset M_u$, 使得*

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \ \lim_{k\to\infty} F(\nabla u)(x_k) = 0, \ \limsup_{k\to\infty} \Delta u(x_k) \leq 0.$$

2.2 Finsler流形上广义极值原理的一些应用

本节将给出Finsler流形上广义极值原理的一些应用.

推论 2.5. *设(M, F, dm)是一个Ric_N有下界的向前完备Finsler流形. 设函数$H: R \times TM \to R$, 且对$t_i, t \in R$和$v_i \in TM$, 以及所有的$t_i \to t$和$v_i \to 0 (i \to \infty)$满足$\liminf_{i\to\infty} H(t_i, v_i) > 0$. 若$u$是$M$上的$C^2$函数, 且满足*

$$\Delta u(x) \geq H(u(x), \nabla u(x)),$$

则u没有上界.

证明. 假定u有上界, 由定理2.4可得

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u(x), \ \lim_{k\to\infty} \nabla u(x_k) = 0.$$

设$\lim\limits_{k\to\infty} u(x_k) = C$, 其中$C$ 是一个常数, 则我们有

$$\liminf_{k\to\infty} H(u(x_k), \nabla u(x_k)) > 0.$$

因为

$$\Delta u(x_k) \geq H(u(x_k), \nabla u(x_k)),$$

由定理2.3可得

$$\frac{2\left(r(x_k)K(x_k)+1\right)\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} + \frac{4r^2(x_k)\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k^2(r^2(x_k)+2)^2(\log(r^2(x_k)+2))^2}$$
$$\geq H(u(x_k), \nabla u(x_k)). \tag{2.2.20}$$

在(2.2.20)中, 令$k \to \infty$可得

$$0 \geq \liminf_{k\to\infty} H(u(x_k), \nabla u(x_k)) > 0.$$

这样产生了矛盾, 所以u没有上界. □

在Finsler流形中, 一般情况下$\nabla(-u) \neq -\nabla u$, 从而$\Delta(-u) \neq -\Delta u$. 因此, 我们需要分别讨论上调和函数和下调和函数的Liouville定理.

令$\overleftarrow{F}(x,y) := F(x,-y)$, $\forall y \in T_xM$, $\overleftarrow{\nabla}$和$\overleftarrow{\Delta}$是关于Finsler度量$\overleftarrow{F}(x,y)$的梯度和Laplacian, 则我们有以下结果.

引理 2.6. *设(M,F,dm)是一个Finsler流形, u是M上的C^2函数, 则有*

$$\nabla(-u) = -\overleftarrow{\nabla} u. \tag{2.2.21}$$

$$\Delta(-u) = -\overleftarrow{\Delta} u. \tag{2.2.22}$$

$$Ric_N(x,-y) = \overleftarrow{Ric}_N(x,y). \tag{2.2.23}$$

证明. 对任意$y \in T_xM \backslash \{0\}$, 由$\overleftarrow{F}^2(x,y) = F^2(x,-y)$可得

$$\overleftarrow{g}_{ij}(x,y)y^iy^j = g_{ij}(x,-y)y^iy^j.$$

上式对y^k求导得

$$2\overleftarrow{g}_{ik}(x,y)y^i + \frac{\partial \overleftarrow{g}_{ij}(x,y)}{\partial y^k}y^iy^j = 2g_{ik}(x,-y)y^i + \frac{\partial g_{ij}(x,-y)}{\partial(-y^k)}(-y^i)y^j.$$

由g_{ij}是零次齐次的可得

$$\overleftarrow{g}_{ik}(x,y)y^i = g_{ik}(x,-y)y^i.$$

对上式关于y^l再求导可得

$$\overleftarrow{g}_{kl}(x,y) + \frac{\partial \overleftarrow{g}_{ik}(x,y)}{\partial y^l}y^i = g_{ik}(x,-y) + \frac{\partial g_{ik}(x,-y)}{\partial(-y^l)}(-y^i).$$

从而可得

$$\overleftarrow{g}_{ij}(x,y) = g_{ij}(x,-y). \tag{2.2.24}$$

由(2.2.24)我们还可以得到

$$\overleftarrow{g}^{ij}(x,y) = g^{ij}(x,-y). \tag{2.2.25}$$

令$\xi := \mathcal{L}_{\overleftarrow{F}}(y) = \overleftarrow{g}_{ij}(x,y)y^jdx^i \in T_x^*M\backslash\{0\}$, 则由(2.2.24)得

$$\mathcal{L}_F(-y) = g_{ij}(x,-y)(-y^j)dx^i = -\overleftarrow{g}_{ij}(x,y)y^jdx^i = -\xi,$$

从而我们可以得到

$$\overleftarrow{g}^{ij}(x,y) = \overleftarrow{g}^{*ij}(\mathcal{L}_{\overleftarrow{F}}(y)) = \overleftarrow{g}^{*ij}(x,\xi)$$

和

$$g^{ij}(x,-y) = g^{*ij}(\mathcal{L}_F(-y)) = g^{*ij}(x,-\xi).$$

根据以上两式和(2.2.25)可得

$$\overleftarrow{g}^{*ij}(x,\xi) = g^{*ij}(x,-\xi), \forall \xi \in T_x^*M\backslash\{0\}. \tag{2.2.26}$$

利用(2.2.26)我们可得

$$\nabla(-u) = g^{*ij}(-du)(-\frac{\partial u}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^i} = -\overleftarrow{g}^{*ij}(du)(\frac{\partial u}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^i} = -\overleftarrow{\nabla}u.$$

$$\Delta(-u) = \mathrm{div}_\sigma(\nabla(-u)) = \mathrm{div}_\sigma(-\overleftarrow{\nabla}u) = -\overleftarrow{\Delta}u.$$

此外, 由(2.2.24)和(2.2.25)可得

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk}(-y) &= \frac{1}{2}g^{il}(-y)\left(\frac{\delta g_{jl}(-y)}{\delta x^k}+\frac{\delta g_{kl}(-y)}{\delta x^j}-\frac{\delta g_{jk}(-y)}{\delta x^l}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overleftarrow{g}^{il}(y)\left(\frac{\delta \overleftarrow{g}_{jl}(y)}{\delta x^k}+\frac{\delta \overleftarrow{g}_{kl}(y)}{\delta x^j}-\frac{\delta g_{jk}(-y)}{\delta x^l}\right)\\ &= \overleftarrow{\Gamma}^i_{jk}(y).\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

由(2.2.27)我们得到

$$\begin{aligned}&R^i_{j\,kl}(x,-y)\\ &= \frac{\delta\Gamma^i_{jl}(x,-y)}{\delta x^k}-\frac{\delta\Gamma^i_{jk}(x,-y)}{\delta x^l}+\Gamma^i_{km}(x,-y)\Gamma^m_{jl}(x,-y)-\Gamma^i_{lm}(x,-y)\Gamma^m_{jk}(x,-y)\\ &= \frac{\delta\overleftarrow{\Gamma}^i_{jl}(x,y)}{\delta x^k}-\frac{\delta\overleftarrow{\Gamma}^i_{jk}(x,y)}{\delta x^l}+\overleftarrow{\Gamma}^i_{km}(x,y)\overleftarrow{\Gamma}^m_{jl}(x,y)-\overleftarrow{\Gamma}^i_{lm}(x,y)\overleftarrow{\Gamma}^m_{jk}(x,y)\\ &= \overleftarrow{R}^i_{j\,kl}(x,y).\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

由(2.2.28)我们得到

$$R^i_k(x,-y)=R^i_{j\,kl}(x,-y)(-y^j)(-y^l)=\overleftarrow{R}^i_{j\,kl}(x,y)(-y^j)(-y^l)=\overleftarrow{R}^i_k(x,y).$$

从而可得

$$Ric(x,-y)=R^k_k(x,-y)=\overleftarrow{R}^k_k(x,y)=\overleftarrow{Ric}(x,y). \tag{2.2.29}$$

另外, 由于S曲率和$\dot{S}$还可表示为[33, 30]

$$S(x,y)=N^k_k(x,y)-y^k\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^k},$$

$$\dot{S}(x,y)=S_{|i}y^i=\frac{\partial S(x,y)}{\partial x^i}y^i-2G^i\frac{\partial S(x,y)}{\partial y^i}.$$

因此,

$$\begin{aligned}S(x,-y) &= N^k_k(x,-y)-(-y^k)\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^k}\\ &= \Gamma^k_{kl}(x,-y)(-y^l)-(-y^k)\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^k}\\ &= \overleftarrow{\Gamma}^k_{kl}(x,y)(-y^l)+(y^k)\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^k}\\ &= -\overleftarrow{N}^k_k(x,y)+y^k\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^k}\\ &= -\overleftarrow{S}(x,y).\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

由于

$$G^i(x,-y)=\frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x,-y)(-y^j)(-y^k)=\frac{1}{2}\overleftarrow{\Gamma}^i_{jk}(x,y)(y^j)(y^k)=\overleftarrow{G}^i(x,y),$$

从而

$$\begin{aligned}\dot{S}(x,-y)&=\frac{\partial S(x,-y)}{\partial x^i}(-y^i)-2G^i(x,-y)\frac{\partial S(x,V)}{\partial(V^i)}|_{V^i=(-y^i)}\\&=\frac{\partial\overleftarrow{S}(x,y)}{\partial x^i}(y^i)-2\overleftarrow{G}^i(x,y)\frac{\partial\overleftarrow{S}(x,y)}{\partial(y^i)}\\&=\dot{\overleftarrow{S}}(x,y).\end{aligned}\tag{2.2.31}$$

由(2.2.29),(2.2.30)和(2.2.31)可得

$$\begin{aligned}Ric_N(x,-y)&=Ric(x,-y)+\dot{S}(x,-y)-\frac{S^2(x,-y)}{N-n}\\&=\overleftarrow{Ric}(x,y)+\dot{\overleftarrow{S}}(x,y)-\frac{\overleftarrow{S}^2(x,y)}{N-n}\\&=\overleftarrow{Ric}_N(x,y).\end{aligned}$$

□

引理 2.7 ([11]). *设B是R^n中的有界开集. 设$u,v\in H^1(B)\cap C(B)$且$a\in R$, 在B上满足$v\geq u$, 且在B上满足$-\Delta v+av\geq-\Delta u+au$. 若$u(x_0)=v(x_0)$, 则在包含$x_0$的$B$的一个分支中, $u\equiv v$.*

根据流形上的单位分解和局部坐标系可知, 上述引理对Finsler流形中的紧集也成立([11]).

定理 2.8. *设(M,F,dm)是一个向前完备的Finsler流形, 假定存在一个紧集使得在紧集外满足$Ric_N\geq c$(c是一个常数), 则流形M上不存在非常值的有上界(下界)的下(上)调和函数.*

证明. 由于在 Finsler 流形中, 一般 $\Delta(-u)\neq-\Delta u$. 因此, 我们需要分别讨论下调和函数和上调和函数的性质.

Step 1. 假定u是一个非常值的有上界的下调和函数.

令$u < L$(L是一个常数)且$\tilde{u} := u - L$, 则我们可以得到$du = d\tilde{u}$, 即, $M_u = M_{\tilde{u}}$. 因此可得$\nabla u = \nabla \tilde{u}$和$\Delta u = \Delta \tilde{u}$. 所以, 我们可以假定$u$是$M$上负的下调和函数.

假设f是M上负的光滑函数. 对某个$\delta > 0$, 令$u = -(f-\delta)^2$. 由于u是下调和函数, 我们可以得到

$$2u(x)\Delta u(x) \leq F^2(\nabla u). \tag{2.2.32}$$

从定理2.3和(2.2.32)我们得到

$$\begin{aligned}
&2u(x_k)\frac{2\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k\log(r^2(x_k)+2)(r(x_k)^2+2)}\left(r(x_k)K(x_k)+1\right)\\
&+2u(x_k)\frac{4r^2(x_k)\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k^2(r^2(x_k)+2)^2(\log(r^2(x_k)+2))^2}\\
&\leq\left(\frac{2r(x_k)[u(x_k)-u(p)+1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}\right)^2.
\end{aligned}$$

由于$u(x_k)-u(p)+1>0$, $k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)>0$, 我们有以下不等式

$$u(x_k)\left(r(x_k)K(x_k)+1\right) \leq \frac{r^2(x_k)[-u(x_k)-u(p)+1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}. \tag{2.2.33}$$

Case 1. 假定$\lim\limits_{k\to\infty} r(x_k) < \infty$. 这表示对充分大的$R$, u在$B_p^+(R)$中的某一点$\bar{x}$达到它的上确界, 其中$B_p^+(R)$表示以p为心R为半径的向前测地球. 在引理2.7中, 令$u(\bar{x}) = \alpha$, $v \equiv \alpha$且$a = 0$. 由于u是下调和函数, 我们得到在$B_p^+(R)$中$u \equiv \alpha$. 由于R是任意的, 我们可得u在M上是常数.

Case 2. 假定$\lim\limits_{k\to\infty} r(x_k) \to \infty$. 设$D$是定理2.8中的紧集, 则存在一个向前测地球$B_p^+(R_0)$, 使得$D \subset B_p^+(R_0)$且在$M \setminus B_p^+(R_0)$中$\mathrm{Ric}_N \geq c$.

设$\gamma(t) : [0,r] \to M$是连接p和x_k的单位极小测地线. 对$\varepsilon > 0$, 令$r_0 = \max\{\sqrt{\frac{N+\varepsilon}{c}}, R_0\}$, 则$c \geq \frac{N+\varepsilon}{r_0^2}$. 由(2.1.1)和定理2.8的假设可得

$$\begin{aligned}
K(x_k) &\leq \frac{N-1}{r(x_k)} - \frac{1}{r^2(x_k)}\int_0^r t^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt\\
&\leq \frac{N-1}{r(x_k)} - \frac{1}{r^2(x_k)}\int_{r_0}^r t^2\frac{N+\varepsilon}{r_0^2}dt - \frac{1}{r^2}\int_0^{r_0} t^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt\\
&\leq \frac{N-1}{r(x_k)} - \frac{1}{r^2(x_k)}\int_{r_0}^r t^2\frac{N+\varepsilon}{t^2}dt + \frac{C_1}{r^2(x_k)}\\
&= -\frac{1+\varepsilon}{r(x_k)} + \frac{r_0(N+\varepsilon)}{r^2(x_k)} + \frac{C_1}{r^2(x_k)},
\end{aligned}$$

其中C_1是一个正常数, 使得$-\int_0^{r_0} t^2\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))dt < C_1$. 因此

$$r(x_k)K(x_k)+1 \le -\varepsilon + \frac{r_0(N+\varepsilon)+C_1}{r(x_k)}. \tag{2.2.34}$$

由(2.2.33)和(2.2.34)我们得到

$$u(x_k)\left\{-\varepsilon + \frac{r_0(N+\varepsilon)+C_1}{r(x_k)}\right\} \le \frac{r^2(x_k)[-u(x_k)-u(p)+1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}. \tag{2.2.35}$$

令(2.2.35)中$\to\infty$可得

$$0 < \varepsilon(\sup f-\delta)^2 = -\varepsilon \sup u \le 0,$$

这样产生了矛盾.

Step 2. 假定u是一个非常值的有下界的上调和函数.

不失一般性, 可以令$u \ge 0$. 假设f是M上负的光滑函数. 对某个$\delta > 0$, 令$u=(f-\delta)^2$, 则

$$du = 2(f-\delta)df. \tag{2.2.36}$$

由(2.2.36)可知$M_u = M_f$, 且由$f-\delta<0$可得

$$\begin{aligned}\nabla u &= g^{*ij}(du)2(f-\delta)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\\ &= 2(f-\delta)g^{*ij}(-df)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\\ &= 2(f-\delta)\overleftarrow{\nabla} f.\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

由(2.2.37)我们得到

$$\begin{aligned}\Delta u &= \mathrm{div}_\sigma(\nabla u)\\ &= \mathrm{div}_\sigma(2(f-\delta)\overleftarrow{\nabla} f)\\ &= 2(f-\delta)\overleftarrow{\Delta} f + 2\overleftarrow{F}^2(\overleftarrow{\nabla} f).\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

由(2.2.38)及u是上调和函数可得

$$\overleftarrow{F}^2(\overleftarrow{\nabla} f) \le -(f-\delta)\overleftarrow{\Delta} f. \tag{2.2.39}$$

由于f是M上负的光滑函数, 故可以在Finsler流形$(M,\overleftarrow{F},dm)$上应用定理2.3. 由(2.2.39)可得在M_f上存在点列$\{x_k\}$使得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2\overleftarrow{r}(x_k)[f(x_k)-f(p)+1]}{k(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)\log(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)}\right)^2\\&\le -(f(x_k)-\delta)\frac{2[f(x_k)-f(p)+1](\overleftarrow{r}(x_k)\overleftarrow{K}(x_k)+1)}{k\log(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)}\\&-(f(x_k)-\delta)\frac{4\overleftarrow{r}^2(x_k)[f(x_k)-f(p)+1]}{k^2(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)^2(\log(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2))^2},\end{aligned}\tag{2.2.40}$$

其中$\overleftarrow{r}(x):=d_{\overleftarrow{F}}(p,x)$, $\overleftarrow{K}$由(2.1.1)给出, 即, 设$\overleftarrow{\gamma}:[0,\overleftarrow{r}]\to M$ 是从p到x的关于$\overleftarrow{F}$的单位极小测地线,

$$\overleftarrow{K}_{\overleftarrow{\gamma}}(x):=\min_{0\le k\le\overleftarrow{r}(x)}\left\{\frac{N-1}{\overleftarrow{r}(x)-k}-\frac{1}{(\overleftarrow{r}(x)-k)^2}\int_k^{\overleftarrow{r}(x)}(t-k)^2\overleftarrow{\mathrm{Ric}}_N(\overleftarrow{\gamma}'(t))dt\right\}.$$

由于$f(x_k)-f(p)+1>0$, 化简(2.2.40)得

$$\frac{2\overleftarrow{r}^2(x_k)[2f(x_k)-f(p)+1-\delta]}{k(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)\log(\overleftarrow{r}^2(x_k)+2)}\le -(f(x_k)-\delta)\left(\overleftarrow{r}(x_k)\overleftarrow{K}(x_k)+1\right).\tag{2.2.41}$$

由(2.2.23)可知, 对任意的$y\in T_xM\backslash\{0\}$, $\overleftarrow{Ric}_N(x,y)=Ric_N(x,-y)$. 因此, Ric_N有下界蕴含着$\overleftarrow{Ric}_N$有下界.

类似于Step 1 中的Case 1和Case 2的讨论, 我们可以推出矛盾. 因此, 定理得证. □

定理 2.8 类似于 Yau 在文献 [9] 中的推论 2.1, 即: 若 M 是一个完备的黎曼流形, 使得在一个紧集外满足 Ricci 曲率有下界 $(\dim M+\varepsilon)/r^2$, 其中 r 是从某个固定点出发的距离函数, $\varepsilon>0$ 是一个常数, 则 M 上不存在非常值的正的上调和函数.

类似于文献 [29] 中的定理 2, 我们给出以下定理.

定理 2.9. *设(M,F,dm)是一个Ric_N非负的向前完备Finsler流形. 若u是M上有上界的光滑函数, 对正常数c满足*

$$\Delta u\ge cF(\nabla u),\tag{2.2.42}$$

则u是常数.

证明. 由于$\mathrm{Ric}_N \geq 0$, 从(2.1.1)可得

$$K(x_k) \leq \frac{N-1}{r(x_k)}. \tag{2.2.43}$$

假设u是一个非常值的有上界函数, 由定理2.3和(2.2.42)可得

$$\frac{2\left(r(x_k)K(x_k)+1\right)\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} + \frac{4r^2(x_k)\left[u(x_k)-u(p)+1\right]}{k^2(r^2(x_k)+2)^2(\log(r^2(x_k)+2))^2}$$
$$\geq \frac{2cr(x_k)[u(x_k)-u(p)+1]}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}.$$

因为$u(x_k)-u(p)+1>0$, 我们得到

$$r(x_k)K(x_k)+1+\frac{2r^2(x_k)}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)} \geq cr(x_k).$$

因此, 由(2.2.43)和上述公式可得

$$c \leq \frac{N}{r(x_k)} + \frac{2r(x_k)}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}. \tag{2.2.44}$$

当$\lim\limits_{k\to\infty} r(x_k) < \infty$, 由引理2.7我们可以得到$u$是一个常数. 若$r(x_k)\to\infty(k\to\infty)$, 则由(2.2.44)可得

$$c \leq 0.$$

这与我们的假设矛盾, 定理得证. □

命题 2.10. *设(M, F, dm)是一个Ric_N有下界的向前完备Finsler流形. 若u是M上非负有上界的光滑函数, 且对正常数c及$s>0$有*

$$\Delta u \geq cu^s, \tag{2.2.45}$$

则$u \equiv 0$.

证明. 由定理2.4可知, 在M_u上存在序列$\{x_k\}$使得

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup_M u, \ \limsup_{k\to\infty} \Delta u(x_k) \leq 0.$$

将上式代入定理的条件可得

$$0 \geq \limsup_{k\to\infty} \Delta u(x_k) \geq c \lim_{k\to\infty} u^s(x_k) = c\sup_M u^s \geq 0,$$

即$c\sup\limits_M u^s = 0$. 由于$u\geq 0$, 我们可得$u\equiv 0$. □

由于一般情况下Finsler流形上$\nabla(-u) \neq -\nabla u$, 从而$\Delta(-u) \neq -\Delta u$. 因此, 我们需要研究反向Finsler度量的极值原理.

定理 2.11. *设(M, F, dm)是一个向前完备的Finsler流形, u是M上非常值的有下界C^2函数. 若Ric_N有下界, 则在M_u中存在点列$\{x_k\}$, 使得*

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \inf_M u, \ \lim_{k\to\infty} \overleftarrow{F}(\overleftarrow{\nabla} u)(x_k) = 0, \ \liminf_{k\to\infty} \overleftarrow{\Delta} u(x_k) \geq 0.$$

证明. 在定理2.4中, 用$-u$代替u, 我们可以得到在M_u上存在一组点列$\{x_k\}$使得

$$\lim_{k\to\infty} (-u)(x_k) = \sup_M (-u) = -\inf_M u,$$

即

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \inf_M u.$$

此外, 由(2.2.21)和(2.2.22)我们得到

$$\lim_{k\to\infty} F(\nabla(-u))(x_k) = \lim_{k\to\infty} F(-\overleftarrow{\nabla} u)(x_k) = \lim_{k\to\infty} \overleftarrow{F}(\overleftarrow{\nabla} u)(x_k) = 0.$$

$$\limsup_{k\to\infty} \Delta(-u)(x_k) = \limsup_{k\to\infty} (-\overleftarrow{\Delta}) u(x_k) = -\liminf_{k\to\infty} \overleftarrow{\Delta} u(x_k) \leq 0,$$

即

$$\liminf_{k\to\infty} \overleftarrow{\Delta} u(x_k) \geq 0.$$

定理证毕. □

作为上述极值定理的应用, 我们给出如下Liouville定理, 它是文献([10])中主要定理的推广. 首先, 我们给出以下引理.

引理 2.12. *设$g(x) = a_1 x^t + a_2 x^{t-1} + \cdots + a_k x^{t-k} + a_{k+1}$是一个实值函数, $t > 1$, 满足$0 \leq t-k \leq 1$, 且$a_1 > 0$, $a_{k+1} < 0$, 则*

$$\sup\{x | g(x) < 0\} < \infty.$$

证明. 由于$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $g(0) = a_{k+1} < 0$, 故存在一点x_1, 使得$g(x_1) = 0$, 从而$\sup\{x | g(x) < 0\} < \infty$. □

定理 2.13. 设(M,F,dm)是一个Ric_N有下界的向前完备Finsler流形. 对任意非负的C^2函数u, 令$G(u)=c_0u^t+c_1u^{t-1}+\cdots+c_ku^{t-k}+c_{k+1}$, 其中$t>1$, $0\le t-k\le 1$且$c_0>c_{k+1}$. 若$\Delta u\ge G(u)$, 则

$$G(\sup u)\le 0.$$

证明. 由于$c_0>c_{k+1}$, 故存在$a>0$, 使得$c_{k+1}<a^tc_0$. 令

$$f=(u+a)^{\frac{1-t}{2}}, \tag{2.2.46}$$

其中t为G的阶数. 由(2.2.46)可知f是有界的, 且

$$0<f\le a^{\frac{1-t}{2}}.$$

此外, 我们还可以得到

$$df=\frac{1-t}{2}(u+a)^{\frac{-1-t}{2}}du.$$

由上式可知$M_f=M_u$. 令$\overleftarrow{F}(x,y):=F(x,-y)$, $\forall y\in T_xM$, 则由(2.2.26)可得

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\nabla}f&=\overleftarrow{g}^{*ij}(df)\frac{1-t}{2}(u+a)^{\frac{-1-t}{2}}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\frac{1-t}{2}(u+a)^{\frac{-1-t}{2}}\overleftarrow{g}^{*ij}(-du)\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\frac{1-t}{2}(u+a)^{\frac{-1-t}{2}}g^{*ij}(du)\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\frac{1-t}{2}(u+a)^{\frac{-1-t}{2}}\nabla u\\&=\frac{1-t}{2}f^{\frac{t+1}{t-1}}\nabla u.\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

由(2.2.47)可得

$$\nabla u=\frac{2}{1-t}f^{\frac{-(t+1)}{t-1}}\overleftarrow{\nabla}f. \tag{2.2.48}$$

根据(2.2.47)(2.2.48)及Laplacian的定义我们得到

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\Delta}f&=\mathrm{div}_\sigma(\overleftarrow{\nabla}f)\\&=\frac{1-t}{2}d(f^{\frac{t+1}{t-1}})(\nabla u)+\frac{1-t}{2}f^{\frac{t+1}{t-1}}\Delta u\\&=\frac{1-t}{2}d(f^{\frac{t+1}{t-1}})(\frac{2}{1-t}f^{\frac{-(t+1)}{t-1}}\overleftarrow{\nabla}f)+\frac{1-t}{2}f^{\frac{t+1}{t-1}}\Delta u\\&=\frac{t+1}{t-1}f^{\frac{2}{t-1}}f^{\frac{-(t+1)}{t-1}}df(\overleftarrow{\nabla}f)+\frac{1-t}{2}f^{\frac{t+1}{t-1}}\Delta u\\&=\frac{t+1}{t-1}f^{-1}\overleftarrow{F}^2(\overleftarrow{\nabla}f)+\frac{1-t}{2}f^{\frac{t+1}{t-1}}\Delta u.\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

(2.2.49)两边同乘以f得到

$$f\overleftarrow{\Delta}f=\frac{t+1}{t-1}\overleftarrow{F}^2(\overleftarrow{\nabla}f)+\frac{1-t}{2}f^{\frac{2t}{t-1}}\Delta u. \tag{2.2.50}$$

由定理2.11可知当$Ric_N\geq c$时(c为常数), 在M_u上存在点列$\{x_k\}$及$\varepsilon_k>0$, 使得

$$f(x_k)\leq\inf_M f+\varepsilon_k,\ \overleftarrow{F}(\overleftarrow{\nabla}f)(x_k)\leq\varepsilon_k,\ \overleftarrow{\Delta}f(x_k)\geq-\varepsilon_k, \tag{2.2.51}$$

其中$\varepsilon_k\to 0(k\to\infty)$. 将(2.2.51)代入(2.2.50)可得

$$f(x_k)(-\varepsilon_k)\leq\frac{t+1}{t-1}\varepsilon_k^2+\frac{1-t}{2}f^{\frac{2t}{t-1}}(x_k)\Delta u(x_k).$$

由于$\frac{1-t}{2}<0$, 我们可以得到

$$f^{\frac{2t}{t-1}}(x_k)\Delta u(x_k)\leq\frac{2}{1-t}\left\{f(x_k)(-\varepsilon_k)-\frac{t+1}{t-1}\varepsilon_k^2\right\}.$$

由f的定义及$\Delta u\geq G(u)$可得

$$\frac{1}{(u+a)^t}(x_k)G(u)(x_k)\leq\frac{2\varepsilon_k}{t-1}f(x_k)+\frac{2(t+1)}{(1-t)^2}\varepsilon_k^2. \tag{2.2.52}$$

另外, 由f的定义可知, 当$f(x_k)\to\inf_M f$时, $u(x_k)\to\sup_M u$. 因此, 若$\sup_M u<\infty$, 则(2.2.52)式中令$k\to\infty$ 我们可以得到

$$\frac{G(\sup u)}{(\sup u+a)^t}\leq 0.$$

从而可得

$$G(\sup u)\leq 0.$$

下面证明在定理的条件下$\sup_M u<\infty$. 由于常数a满足$c_{k+1}<a^tc_0$, 即$c_{k+1}a^{-t}<c_0$, 从而我们可以找到某个正常数δ, 使得

$$c_{k+1}a^{-t}<\delta<c_0. \tag{2.2.53}$$

由于f是有界的, 且$\varepsilon_k\to 0(k\to\infty)$, 故可以取充分大的$k$使得不等式(2.2.52)的右边小于等于$\delta$, 即

$$\frac{1}{(u+a)^t}(x_k)G(u)(x_k)\leq\delta,$$

从而我们可得

$$G(u)(x_k) \leq (u+a)^t(x_k)\delta.$$

令$g(x) = G(x) - \delta(x+a)^t$, 则

$$g(x) = (c_0 - \delta)x^t + \cdots + (c_{k+1} - a^t\delta).$$

由(2.2.53)和引理2.12可知$\sup\limits_M u < \infty$. 定理证毕. □

应用定理2.13, 我们可以得到如下的Liouville定理.

定理 2.14. *设(M, F, dm)是一个Ric_N有下界的向前完备Finsler流形. 若u是M上非负的C^2函数, 且对常数$c > 0$及$t > 1$有*

$$\Delta u \geq cu^t, \tag{2.2.54}$$

则$u \equiv 0$.

2.3 Finsler流形上带权Ricci曲率的体积比较定理

在文献[22]中Ohta已经给出Finsler流形上带权Ricci曲率的体积比较定理及其证明, 但证明方法比较复杂, 且用了很多很复杂的记号. 本节将利用Finsler流形上的极坐标系给出一个体积比较定理的简单证明方法.

设(M, F, dm)是n维向前完备的Finsler流形, 给定M上一点p, 对任意的$x \in M$, $r(x) := d(p, x)$. 对于某个常数K, 令

$$\mathfrak{s}_{K,N}(t) = \begin{cases} \sin\sqrt{\frac{K}{N-1}}t & K > 0, \\ t & K = 0, \\ \sinh\sqrt{\frac{-K}{N-1}}t & K < 0. \end{cases}$$

$$ct_{K,N}(t) = \frac{\mathfrak{s}'_{K,N}(t)}{\mathfrak{s}_{K,N}(t)}.$$

命题 2.15. *设(M, F, dm)是一个n维向前完备的Finsler流形, 对某个常数K, 若$Ric_N \geq K$, 则*

$$\Delta r \leq (N-1)ct_{K,N}(r). \tag{2.3.55}$$

证明. 设$\gamma:[0,l]\to M$是长度为$l=r(x)$, 从p到x的单位极小测地线, $e_1,e_2,\cdots,e_n=\gamma'(0)$是$(T_pM,g_{\gamma'(0)})$上的正交基. 令$E_1(t),E_2(t),\cdots,E_n(t)=\gamma'(t)$是沿$\gamma(t)$的平行向量场, 使得$E_i(0)=e_i$, 且$\{J_i(t)\}$是唯一在$\gamma(0)$点为零的Jacobi场, 使得$J_i(l)=E_i(l)$. 为方便, 令$K=(N-1)c$, $c=\frac{K}{N-1}$, 则

$$\mathfrak{s}_c(t)=\begin{cases}\sin\sqrt{c}t & c>0,\\ t & c=0,\\ \sinh\sqrt{-c}t & c<0.\end{cases}$$

设

$$W_i(t)=\frac{\mathfrak{s}_c(t)}{\mathfrak{s}_c(r)}E_i(t).$$

显然, $W_i(0)=0,W_i(l)=J_i(l)$. 由于

$$\begin{aligned}\Delta r&=tr_{\nabla r}H(r)-S(\nabla r)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}H(r)(E_i(l),E_i(l))-S(\nabla r)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}I_\gamma(J_i,J_i)-S(\nabla r).\end{aligned}$$

由指标引理我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}I_\gamma(J_i,J_i)&\le\sum_{i=1}^{n-1}I_\gamma(W_i,W_i)\\&=\frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)}\int_0^l\{(n-1)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2-\mathfrak{s}_c^2(t)\mathrm{Ric}(\gamma'(t))\}dt.\end{aligned}$$

从而有

$$\Delta r\le\frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)}\int_0^l\{(n-1)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2-\mathfrak{s}_c^2(t)\mathrm{Ric}(\gamma'(t))\}dt-S(\nabla r). \tag{2.3.56}$$

由带权Ricci曲率的定义我们得到

$$\mathrm{Ric}(\gamma'(t))=\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t))-S'(\gamma'(t))+\frac{1}{N-n}S^2(\gamma'(t)). \tag{2.3.57}$$

将(2.3.57)代入(2.3.56)可得

$$
\begin{aligned}
\Delta r \leq & \frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l \left\{ (n-1)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2 - \mathfrak{s}_c^2(t) \left[\mathrm{Ric}_N(\gamma'(t)) - S'(\gamma'(t)) + \frac{S^2(\gamma'(t))}{N-n} \right] \right\} dt \\
& - S(\nabla r) \\
= & \frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l \left\{ (n-1)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2 - \mathfrak{s}_c^2(t) \mathrm{Ric}_N(\gamma'(t)) - \frac{1}{N-n} S^2(\gamma'(t)) \mathfrak{s}_c^2(t) \right\} dt \\
& - \frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l 2\mathfrak{s}_c'(t) \mathfrak{s}_c(t) S(\gamma'(t) dt \\
= & \frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l \left\{ (n-1)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2 - \mathfrak{s}_c^2(t) \mathrm{Ric}_N(\gamma'(t)) - \left(\frac{S\mathfrak{s}_c}{\sqrt{N-n}} + \mathfrak{s}_c' \sqrt{N-n} \right)^2 \right\} dt \\
& + \frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l (N-n)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2 dt \\
\leq & \frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l \left\{ (N-1)[\mathfrak{s}_c'(t)]^2 - (N-1)c\mathfrak{s}_c^2(t) \right\} dt \\
= & \frac{N-1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} (\mathfrak{s}_c'(t)\mathfrak{s}_c(t))|_0^r \\
= & (N-1)\frac{\mathfrak{s}_c'(r)}{\mathfrak{s}_c(r)},
\end{aligned}
$$

其中第二个等号成立是因为

$$
\int_0^l \mathfrak{s}_c^2 S'(t)dt = \mathfrak{s}_c^2(r)S(r) - \int_0^l 2\mathfrak{s}_c'(t)\mathfrak{s}_c(t)S(t)dt,
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathfrak{s}_c^2(r)} \int_0^l \mathfrak{s}_c^2 S'(t)dt - S(\nabla r) &= S(r) - \int_0^l 2\mathfrak{s}_c'(t)\mathfrak{s}_c(t)S(t)dt - S(\nabla r) \\
&= - \int_0^l 2\mathfrak{s}_c'(t)\mathfrak{s}_c(t)S(t)dt.
\end{aligned}
$$

□

设(M,F)是一个n维向前完备的Finsler流形, p是M上一点. 设$\{x^i\}$为p点某个邻域上的局部坐标系, 则F诱导出$T_pM\backslash\{0\}$上的一个黎曼度量

$$
g_p(y) := g(p,y)_{ij} dy^i \otimes dy^j,
$$

其中$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 用$\dot{g}_p$表示由$g_p$在$S_pM = \{y \in T_pM : F(p, y) = 1\}$上诱导的黎曼度量, 并用$d\nu_p$表示其体积形式. 那么,

$$d\nu_p(y) = \sqrt{\det g_{ij}(p, y)} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} y^i dy^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dy^i} \wedge \cdots \wedge dy^n \right).$$

设$\{\bar{x}^i\}_{i=1}^n$为$T_pM \backslash \{0\}$上的(局部)极坐标系, 也即

$$\bar{x}^n(v) := \bar{r}(v) := F(v),\ \bar{x}^\alpha(v) := \bar{\theta}^\alpha \left(\frac{v}{F(v)} \right),$$

其中$\{\bar{\theta}^\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$是$S_pM$上的局部坐标. 根据[5, p. 412], $g_p = d\bar{r} \otimes d\bar{r} + \bar{r}^2 \dot{g}_p$, 且$d\nu_p = \sqrt{\det \dot{g}_p}\, d\bar{\Theta}$, 其中$d\bar{\Theta} := d\bar{\theta}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\theta}^{n-1}$.

取定一向量$y \in S_pM$, 用i_y表示y的割值. 定义$D_p := \{ty \in T_pM | y \in S_pM, 0 \le t < i_y\}$, $\mathcal{D}_p := \exp_p(D_p)$. 则有$M = \mathcal{D}_p \sqcup \mathrm{Cut}_p$. 那么, 我们把坐标系

$$\{x^i\} = \{\bar{x}^i \circ \exp_p^{-1}\} : \mathcal{D}_p - \{p\} \to \mathbb{R}^n$$

称为是关于点p的极坐标系. 为方便起见, 简记

$$r := \bar{x}^n \circ \exp_p^{-1},\ \theta^\alpha := \bar{x}^\alpha \circ \exp_p^{-1}.$$

要注意的是, 极坐标其实描述了一个从$(0, +\infty) \times S_pM$到$\mathcal{D}_p \backslash \{p\}$上的微分同胚, 即

$$(r, y) \mapsto \exp_p ry.$$

因此, 我们也用(r, y)来表示关于点p的极坐标系. 那么, 设y是S_pM中的一点, 坐标是$\{\theta^\alpha\}$, 则有

$$\left.\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\right|_{(r,y)} = (\exp_p)_{*ry} \left(r \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} \right),$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{(r,y)} = (\exp_p)_{*ry} y.$$

给定M上的任意体积形式dm. 在极坐标下, 我们将它表示为$dm|_{(r,y)} = \sigma_p(r, y) dr \wedge d\Theta$, 其中$d\Theta = d\theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^{n-1}$. 因此, 在极坐标$(r, y)$下, 根据(1.1.3)我们得到

$$\Delta r = div_\sigma(\nabla r) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^i} \{\sigma g^{ij}(\nabla r) \frac{\partial r}{\partial x^j}\} = \frac{\partial}{\partial r} \ln \sigma. \tag{2.3.58}$$

由于Cut_p关于dm的测度$V(Cut_p) = 0$, 故Finsler流形M上向前测地球$B_p^+(R)$的体积为

$$V(R) = \int_{B_p^+(R)} dm = \int_0^R \int_{\mathcal{D}_p(r)} \sigma(r,\theta) dr d\theta. \tag{2.3.59}$$

引理 2.16 ([38]). *假设f, g是变量r的正可积函数, 并且*

$$\frac{f}{g}$$

是单调递增(递减)的, 则函数

$$\frac{\int_0^r f(t)dt}{\int_0^r g(t)dt}$$

也是单调递增(递减)的.

下面我们将给出带权Ricci曲率的体积比较定理.

定理 2.17. *设(M, F, dm)是一个向前完备的Finsler流形. 若对常数K及$N \in [n, \infty]$, 带权的Ricci曲率$Ric_N \geq K$, 则对$0 < r < R < i_p$有*

$$\frac{V(R)}{V(r)} \leq \frac{\int_0^R (\mathfrak{s}_{K,N}(t))^{N-1} dt}{\int_0^r (\mathfrak{s}_{K,N}(t))^{N-1} dt},$$

其中i_p是p点的单射半径.

证明. 由(2.3.55)和(2.3.58)得

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \sigma(r,y) \leq (N-1) \frac{\mathfrak{s}'_{K,N}(r)}{\mathfrak{s}_{K,N}(r)} = \frac{\partial}{\partial r} \ln(\mathfrak{s}_{K,N}(r))^{N-1},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \sigma(r,y) - \ln(\mathfrak{s}_{K,N}(r))^{N-1} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\sigma(r,y)}{(\mathfrak{s}_{K,N}(r))^{N-1}} \leq 0,$$

从而可得$\ln \frac{\sigma(r,y)}{(\mathfrak{s}_{K,N}(r))^{N-1}}$关于$r$不增. 我们还可以得到

$$\frac{\sigma(r,y)}{(\mathfrak{s}_{K,N}(r))^{N-1}}$$

关于r不增. 由于

$$\frac{1}{C_{n-1}} \int_{S_pM} \frac{\sigma(r,y)}{(\mathfrak{s}_{K,N}(r))^{N-1}} d\theta = \frac{\int_{S_pM} \sigma(r,y) d\theta}{\mathfrak{s}_{K,N}^{N-1}(t) C_{n-1}},$$

故我们可得

$$\frac{\int_{S_pM}\sigma(r,y)d\theta}{\mathfrak{s}_{K,N}^{N-1}(t)C_{n-1}}$$

关于r也是不增的, 其中, C_{n-1}表示$n-1$维欧式单位球面的体积. 因此, 对$0<r<i_p$, 由引理2.16可得

$$\frac{\int_0^r\int_{S_pM}\sigma(t,y)dtd\theta}{\int_0^r\mathfrak{s}_{K,N}^{N-1}(t)C_{n-1}}=\frac{V(r)}{\int_0^r\mathfrak{s}_{K,N}^{N-1}(t)C_{n-1}}$$

关于r也是不增的, 从而对$0<r<R<i_p$有

$$\frac{V(R)}{V(r)}\leq\frac{\int_0^R(\mathfrak{s}_{K,N}(t))^{N-1}dt}{\int_0^r(\mathfrak{s}_{K,N}(t))^{N-1}dt}$$

□

此页不缺内容

第三章　Finsler流形上的Liouville定理和唯一性定理

在本章中, 我们首先研究Finsler流形中 L^p可积的调和(下或上调和)函数的Liouville 定理, 然后, 给出紧致无边的 Finsler 流形中调和函数的梯度估计, 并得到推论: 对带权 Ricci 曲率非负的这样的Finsler 流形, 其上的调和函数是常数; 最后给出 Finsler 流形上的热方程解的唯一性定理.

3.1　Finsler流形上L^p可积的调和函数的Loiuville定理

由于 Finsler 流形上的几何量与方向有关, 且一般情况下, Finsler 度量不具有对称性, 即, Finsler 度量不是可反的. 为此, 我们给出 Finsler 流形上可反系数的概念.

设 (M,F) 是一个 Finsler 流形, 若对 $y\in T_xM$, $F(x,-y)=F(x,y)$, 我们称 F 是可反的. 一般情况下, Finsler 度量不具有可反性, 因此, 我们令([30])

$$\Lambda := \sup_{(x,y)\in TM\backslash\{0\}} \left\{ \frac{F(x,-y)}{F(x,y)} \right\},$$

称 Λ 为 (M,F) 的可反系数. 显然, F 可反的充要条件是 $\Lambda=1$. 此外, 当Finsler度量是黎曼度量时, 基本张量与方向无关, 因此 $\Lambda=1$.

引理 3.1. *设(M,F)是一个具有有限可反系数Λ的Finsler流形. 若F^*的可反系数为Λ^*, 则$\Lambda^*=\Lambda$.*

证明. 设$\mathcal{L}^{-1}: T^*M\backslash\{0\}\to TM\backslash\{0\}$表示Legendre变换的逆变换. 对任意的$\xi\in T^*M\backslash\{0\}$, 令$X=\mathcal{L}^{-1}(-\xi)$, 则由[33]中的引理3.1.1可得

$$(-\xi)(X)=F^*(-\xi)F(X).$$

另一方面, 由F^*的定义我们得到

$$(-\xi)(X)=\xi(-X)\le F^*(\xi)F(-X).$$

因此, 我们有

$$F^*(-\xi)F(X)\le F^*(\xi)F(-X),$$

即

$$\frac{F^*(-\xi)}{F^*(\xi)} \leq \frac{F(-X)}{F(X)} \leq \Lambda.$$

这隐含着$\Lambda^* \leq \Lambda$. 类似, 我们可以证明$\Lambda \leq \Lambda^*$. 引理3.1证毕. □

设 (M, F, dm) 是一个带有光滑体积测度 dm 的向前完备 Finsler 流形, u 是 M 上非负的 C^2 函数. 对 M 中的某点 x_0 及 $r > 0$, $B_r^+(x_0)$ 表示以 x_0 为心r 为半径的向前测地球, 它关于dm的体积记为$V(r)$. 类似于文献 [34], 对 $p \in \mathbb{R}$, 我们令

$$V_p(r) := \int_{B_r^+(x_0)} u^p dm.$$

注意, 当 $p < 0$ 时, 我们要求 u 是 M 上的正函数. 当$p = 0$时, $V_p(r)$ 即为 $V(r)$.

定理 3.2. *设(M, F, dm)是一个具有有限可反系数的向前完备Finsler流形, u是M上非负的C^2-函数. 假设*

$$\int_1^\infty \frac{r}{V_p(r)} dr = \infty. \tag{3.1.1}$$

a) 若$p \in [0, 1)$且u是M上非负的上调和函数, 则u为常数.

b) 若$p \in (1, \infty)$且u是M上非负的下调和函数, 则u是常数.

c)若$p \in (-\infty, 0)$且u是M上正的上调和函数, 则u为常数.

证明. 我们将分三种情况来证明定理: $p > 0 (p \neq 1)$, $p < 0$和$p = 0$.

Case 1: $p > 0$**且**$p \neq 1$.

当$p > 1$, 我们假设u是非负的下调和函数, 当$0 \leq p < 1$, 我们假定u是非负的上调和函数. 给定点$x_0 \in M$, 令

$$\varphi(x) := \min\{(R - r(x))^+, R - r_0\}, \tag{3.1.2}$$

其中$r(x) = d(x_0, x)$, $r_0, R \in \mathbb{R}^+$, 使得$0 < r_0 < R$, $(R - r(x))^+ = \max\{R - r(x), 0\}$. 设$\Omega = \bar{B}_R^+(x_0) \backslash B_{r_0}^+(x_0)$. 为了形式简单, 我们记$B_r := B_r^+(x_0)$, 从而由(3.1.2)可得

$$\varphi(x) = \begin{cases} R - r_0 & x \in B_{r_0}, \\ 0 & x \in M \backslash B_R, \\ R - r(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

显然, 在Ω上$d\varphi=-dr$, 且在$M\backslash\Omega$上$d\varphi=0$. 令F的可反系数为Λ, 则由引理3.1可得在Ω上

$$F^*(d\varphi)^2=F^*(-dr)^2\leq\Lambda^2 \tag{3.1.3}$$

且在$M\backslash\Omega$上$F^*(d\varphi)=0$. 由文献[25]中的引理3.5可知, Δu在$M\backslash M_u$上几乎处处为零. 因此由引理1.5我们得到

$$\begin{aligned}&(p-1)\int_{M_u\cap B_R}u^{p-1}\varphi^2\Delta u\\&=(p-1)\int_{B_R}u^{p-1}\varphi^2\Delta u\\&=-(p-1)\int_{B_R}d(u^{p-1}\varphi^2)(\nabla u)\\&=-(p-1)^2\int_{B_R}u^{p-2}\varphi^2F(\nabla u)^2-2(p-1)\int_\Omega u^{p-1}\varphi d\varphi(\nabla u).\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

令$v:=u^{\frac{p}{2}}$, 当$u>0$时有

$$dv=\frac{p}{2}u^{\frac{p}{2}-1}du.$$

从而

$$F(\nabla v)=F^*(dv)=F^*(\frac{p}{2}u^{\frac{p}{2}-1}du)=\frac{p}{2}u^{\frac{p}{2}-1}F(\nabla u). \tag{3.1.5}$$

当$u=0$时dv几乎处处为零.

另外, 由文献[39]中的引理7.1可得

$$|d\varphi(\nabla u)|\leq\Lambda F^*(d\varphi)F(\nabla u),$$

从而由假定及(3.1.4)-(3.1.5)可得

$$(1-\frac{1}{p})^2\int_{B_R}\varphi^2F(\nabla v)^2\leq|1-\frac{1}{p}|\Lambda\int_\Omega v\varphi F^*(d\varphi)F(\nabla v)\leq 0. \tag{3.1.6}$$

由Hölder's不等式和(3.1.6)可得

$$(1-\frac{1}{p})^2\int_{B_R}\varphi^2F(\nabla v)^2\leq\Lambda\left(\int_\Omega v^2F^*(d\varphi)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((1-\frac{1}{p})^2\int_\Omega\varphi^2F(\nabla v)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\left[(1-\frac{1}{p})^2\int_{B_R}\varphi^2F(\nabla v)^2\right]^2\leq\Lambda^2\left(\int_\Omega v^2F^*(d\varphi)^2\right)\left((1-\frac{1}{p})^2\int_\Omega\varphi^2F(\nabla v)^2\right). \tag{3.1.7}$$

令

$$G(r) = (1 - \frac{1}{p})^2 \int_{B_r} F(\nabla v)^2$$

和

$$K = (1 - \frac{1}{p})^2 \int_{\Omega} \varphi^2 F(\nabla v)^2.$$

假定u不是常数. 设$\rho_0 > 0$充分大, 使得u在B_{ρ_0}上不是常数. 固定$R > r_0 > \rho_0$, 则(3.1.7)的所有项都是正的. 因此我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v^2 F^*(d\varphi)^2 &\geq \frac{1}{\Lambda^2} \frac{[(1-\frac{1}{p})^2 \int_{B_R} \varphi^2 F(\nabla v)^2]^2}{(1-\frac{1}{p})^2 \int_{\Omega} \varphi^2 F(\nabla v)^2} \\
&= \frac{1}{\Lambda^2} \frac{[(1-\frac{1}{p})^2 \int_{B_{r_0}} (R-r_0)^2 F(\nabla v)^2 + (1-\frac{1}{p})^2 \int_{\Omega} \varphi^2 F(\nabla v)^2]^2}{K} \\
&= \frac{1}{\Lambda^2} \frac{[(R-r_0)^2 G(r_0) + K]^2}{K} \\
&\geq \frac{1}{\Lambda^2} (R-r_0)^2 G(r_0) \left\{ \frac{(R-r_0)^2 G(r_0)}{K} + 1 \right\}. \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
K = (1-\frac{1}{p})^2 \int_{\Omega} \varphi^2 F(\nabla v)^2 &\leq (1-\frac{1}{p})^2 (R-r_0)^2 \int_{\bar{B}_R \setminus B_{r_0}} F(\nabla v)^2 \\
&= (G(R) - G(r_0))(R-r_0)^2,
\end{aligned}$$

从而由(3.1.8)可得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v^2 F^*(d\varphi)^2 &\geq \frac{1}{\Lambda^2} (R-r_0)^2 G(r_0) \left\{ \frac{G(r_0)}{G(R) - G(r_0)} + 1 \right\} \\
&= \frac{1}{\Lambda^2} (R-r_0)^2 \frac{G(r_0) G(R)}{G(R) - G(r_0)}. \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

另一方面, 由(3.1.3)我们得到

$$\int_{\Omega} v^2 F^*(d\varphi)^2 \leq \Lambda^2 \int_{\Omega} u^p = \Lambda^2 (V_p(R) - V_p(r_0)). \qquad (3.1.10)$$

从而由(3.1.9)和(3.1.10)可得

$$\Lambda^2 (V_p(R) - V_p(r_0)) \geq \frac{1}{\Lambda^2} (R-r_0)^2 \frac{G(r_0) G(R)}{G(R) - G(r_0)},$$

即

$$\frac{1}{G(r_0)} - \frac{1}{G(R)} \geq \frac{1}{\Lambda^4}\frac{(R-r_0)^2}{V_p(R)-V_p(r_0)}. \tag{3.1.11}$$

固定r_0, 取$R_k = 2^k r_0$, $k \in N^+$, 即

$$r_0 = R_0 < R_1 < \cdots < R_n.$$

从而由(3.1.11)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{G(r_0)} &\geq \frac{1}{G(R_n)} + \frac{1}{\Lambda^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(R_k-R_{k-1})^2}{V_p(R_k)-V_p(R_{k-1})} \\ &\geq \frac{1}{4\Lambda^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(R_k)^2}{V_p(R_k)}.\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

由(3.1.1)我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(R_k)^2}{V_p(R_k)} = \infty.$$

因此, 在(3.1.12)中令$n \to \infty$我们得到

$$\int_{B_{r_0}} F(\nabla v)^2 \leq 0,$$

这表示在$B^+_{r_0}(x_0)$上$F(\nabla v)^2 = 0$. 因为$r_0 > 0$是任意的, 我们得到在M上$F(\nabla v)^2 = 0$. 从而可得u在M是常数. 这与假设矛盾. 因此, 在这种情况下u是常数.

Case 2: $p < 0$.

当$p < 0$时, 假定u是一个正的上调和函数. 令$v := u^{\frac{p}{2}}$.

$$dv = -|\frac{p}{2}|u^{\frac{p}{2}-1}du.$$

由引理3.1我们得到

$$F(\nabla v)^2 = F^*(dv)^2 = F^*(-|\frac{p}{2}|u^{\frac{p}{2}-1}du)^2 = \frac{p^2}{4}u^{p-2}F^*(-du)^2 \leq \frac{p^2}{4}\Lambda^2 u^{p-2}F^2(\nabla u),$$

从而在M上有

$$u^{p-2}F(\nabla u)^2 \geq \frac{4}{p^2}\frac{1}{\Lambda^2}F^2(\nabla v).$$

类似的由(1.1.4)可得

$$u^{p-2}F(\nabla u)^2 \leq \Lambda^2\frac{4}{p^2}F^2(\nabla v).$$

设φ如同Case 1. 类似于Case 1我们得到

$$
\begin{aligned}
(p-1)\int_{B_R} u^{p-1}\varphi^2\Delta u &= -(p-1)^2\int_{B_R} u^{p-2}\varphi^2 F(\nabla u)^2 - 2(p-1)\int_{\Omega} u^{p-1}\varphi d\varphi(\nabla u). \\
&\le -4(1-\frac{1}{p})^2\frac{1}{\Lambda^2}\int_{B_R}\varphi^2 F(\nabla v)^2 \\
&+ 4\Lambda\left(\int_{\Omega} v^2 F^*(d\varphi)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((1-\frac{1}{p})^2\int_{\Omega}\Lambda^2\varphi^2 F(\nabla v)^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

由假设可知(3.1.13)的左边非负, 从而我们得到

$$
\left[(1-\frac{1}{p})^2\frac{1}{\Lambda^2}\int_{B_R}\varphi^2 F(\nabla v)^2\right]^2 \le \Lambda^4\left(\int_{\Omega} v^2 F^*(d\varphi)^2\right)\left((1-\frac{1}{p})^2\int_{\Omega}\varphi^2 F(\nabla v)^2\right).
$$

从上述式子及(3.1.3)我们得到

$$
\left[(1-\frac{1}{p})^2\int_{B_R}\varphi^2 F(\nabla v)^2\right]^2 \le \Lambda^{10}\left(\int_{\Omega} v^2\right)\left((1-\frac{1}{p})^2\int_{\Omega}\varphi^2 F(\nabla v)^2\right).
$$

类似于Case 1的讨论, 我们可以得到u是常数.

Case 3: $p=0$.

设u是非负的上调和函数, 向前测地球B_r的体积$V(r)$满足(3.1.1). 令$u_k = \min\{u,k\}$, $k\in R^+$. 对任意的$k\in R^+$,

$$
u_k = \begin{cases} k & u\ge k \\ u & u<k. \end{cases}
$$

显然, u_k在$\{u>k\}$和$\{u<k\}$是可微的, 并且有

$$
\begin{aligned}
du_k &= 0 \quad u>k, \\
du_k &= du \quad u<k.
\end{aligned}
$$

令$E=\{x\in M|u(x)=k\}$, $D^+=\{x\in E|du\ne 0\}$, $D^-=\{x\in E|du=0\}$, 则我们可以证明D^+关于dm的测度$V(D^+)=0$. 给定一个点$q\in D^+\subset M$, 在M中存在一个局部坐标系$(U;x^i)$, 使得$q\in U$. 因为在D^+上$du\ne 0$, 我们可以假定在D^+上$\frac{\partial u}{\partial x^n}\ne 0$. 在$U$上取$z^1=x^1, z^2=x^2,\cdots z^n=u(x)-k$, 则我们可以得到

$$
|\frac{\partial(z^1,z^2,\cdots z^n)}{\partial(x^1,x^2,\cdots x^n)}| = \frac{\partial u}{\partial x^n}\ne 0.
$$

因此, $(z^1, z^2, \cdots z^n)$可以作为U上的坐标系,且$(z^1, z^2, \cdots z^n)|_{D^+} = (z^1, z^2, \cdots z^{n-1}, 0)$. 从而$\dim(D^+) \leq n-1$, 即, $V(D^+) = 0$.

此外, 我们还可以证明在D^-上$du_k = 0$. 取任意的C^∞曲线$\gamma(t) \subset M$使得$u(\gamma(0)) = k$, 则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\left|\frac{\min\{u(\gamma(t)), k\} - \min\{u(\gamma(0)), k\}}{t-0}\right| \\
&= \lim_{t\to 0}\left|\frac{\min\{u(\gamma(t)) - k, 0\}}{t}\right| \\
&= \lim_{t\to 0}\left|\min\{\frac{u(\gamma(t)) - k}{t}, 0\}\right| \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式由D^-上$du = 0$得到. 从而我们可得在$\{u = k\}$上du_k几乎处处为零. 因此, 在$\{u \geq k\}$上$\nabla u_k = \mathcal{L}^{-1}(du_k)$几乎处处为零, 在$\{u < k\}$上$\nabla u_k = \mathcal{L}^{-1}(du_k) = \nabla u$. 从而我们得到

$$
\int_M d\varphi(\nabla u_k) = \int_{\{u<k\}} d\varphi(\nabla u). \tag{3.1.14}
$$

类似于上面的讨论我们得到在$\{u = k\}$上∇u几乎处处为零. 由文献[25]的引理3.5可知Δu在$\{M \backslash M_u\}$上几乎处处为零, 且在M_u上$\Delta u \leq 0$, 我们得到

$$
\int_{\{u<k\}} d\varphi(\nabla u) dm = \int_{\{u=k\}} \varphi \nabla u d\mu - \int_{\{u<k\}} \varphi \Delta u dm = -\int_{\{u<k\}\cap M_u} \varphi \Delta u dm \geq 0, \tag{3.1.15}
$$

其中$d\mu$由dm在$\{u = k\}$上诱导的体积形式. 因此, 由(3.1.14)和(3.1.15)可得

$$
\int_M \varphi \Delta u_k \leq -\int_M d\varphi(\nabla u_k) \leq 0,
$$

即, 在分布的意义下u_k是一个非负的上调和函数. 从Case 1的讨论可知, 对任意的$q > 0$且$q \neq 1$, (3.1.7)式对于u_k成立, 其中p可以由q代替, v由$v_k := (u_k)^{q/2}$ 代替. 注意到

$$
\int_{B_R} u_k^q dm \leq \int_{B_R} k^q dm = k^q V(R),
$$

这表明(3.1.1)对u_k成立. 因此, 由Case 1我们得到u_k是常数. 由于k是任意的, 从而可得u是常数. □

在黎曼流形中, 上述定理是由 Karp([16]) 和 Grigor'yan A.([2, 3]) 给出, 之后 Sturm([34]) 把它推广到 Dirichlet 空间的情况上.

显然, 当函数 $u \in L^p(M)(p > 0$ 且 $p \neq 1)$ 时, 满足定理 3.2 的条件. 并且对正常数 C , 当向前测地球的体积满足

$$V(r) \leq Cr^2 \text{或} \quad V(r) \leq Cr^2 \log r,$$

也满足定理 3.2 的条件. 因此, 我们有以下两个推论, 它们分别推广了 Yau 在文献 [43] 中的定理 3和 Cheng 和 Yau 在文献 [9] 中的推论 1.1.

推论 3.3. *设(M, F, dm)是一个具有有限可反系数的向前完备Finsler流形.*

a) 若$p \in [0, 1)$, 则每个非负的L^p上调和函数是常数. 特别地, 若M的体积$V(M) < \infty$, 则M上每个非负的上调和函数是常数.

b) 若$p \in (1, \infty)$, 则每个非负的L^p下调和函数是常数.

推论 3.4. *设(M, F, dm)是一个具有有限可反系数的向前完备Finsler流形, u是M上非负的上调和函数. 若存在正常数 C 及序列 $R_k \to +\infty$, 使得*

$$V_p(R_k) \leq CR_k^2,$$

则我们有以下结果:

a) 若 $p \in [0, 1)$, 则每个非负的 L^p 上调和函数是常数. 特别地, 若 $V(R_k) < CR_k^2$, 则 M 上每个非负的上调和函数是常数.

b) 若 $p \in (1, \infty)$, 则每个非负的 L^p 下调和函数是常数.

由推论3.3 的b)我们可以推出α下调和函数的Liouville定理, 它推广了[1]中的对应结果.

定义 3.1. 设$\alpha \in R$, 若对非负的$\varphi \in C_c^\infty(M)$, M上的C^2函数u满足$\int_M \varphi(\Delta u - \alpha u)dm = (\geq, \leq)0$, 则称$u$是$\alpha$调和(下调和,上调和)的.

显然, 当$\alpha = 0$, u就是分布意义下的调和(下调和,上调和)函数.

推论 3.5. *设(M, F, dm)是一个具有有限可反系数的向前完备Finsler流形, $u(x)$是M上非负的C^2函数. 若$u \in L^p(M)$,$(p > 1)$, 且存在$\alpha \geq 0$, 使得u是α下调和的, 则u是一个常数. 特别地, 若$\alpha > 0$, 且u是α下调和的, 则$u \equiv 0$.*

证明. 由u是α下调和的可得

$$\int_M \varphi \Delta u dm \geq \int_M \alpha u \varphi dm \geq 0,$$

其中$\varphi \in C_c^\infty(M)$且$\varphi \geq 0$, 即, u在分布意义下是下调和的. 由于$u \in L^p(M)$,($p > 1$), 则由推论3.3 的b)可以推出u是一个常数. 另外, 当$\alpha > 0$, 由上面的过程可知u是一个常数, 再由u是α下调和的可知, $u \equiv 0$. □

下面给出Finsler流形上的L^1可积函数的Liouville定理. 首先, 我们给出下面引理.

引理 3.6. *设(M, F)是一个具有有限可反系数Λ的向前完备Finsler流形, 则存在光滑函数φ, 使得*

$$F^*(d\varphi) \leq \frac{C}{R}, \tag{3.1.16}$$

其中$R > 0$, $C = C(\Lambda)$是依赖于Λ的正常数.

证明. 设$\omega(t)$是一个光滑的实值函数满足$0 \leq \omega(t) \leq 1$, 使得

$$\omega(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & t \geq 2. \end{cases}$$

显然, ω'是有界的. 故存在某个正常数C_0, 使得$|\omega'| \leq C_0$.

设

$$\varphi(x) = \omega\left(\frac{r(x)}{R}\right),$$

其中$r(x) = d(x_0, x)$. 因此, 我们有

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_p(R), \\ 0 & x \in M \backslash B_p(2R), \end{cases}$$

且

$$d\varphi = \omega' \frac{dr}{R}.$$

因此, 由引理3.1可得

$$F^*(d\varphi)^2 = F^*(\frac{\omega'}{R}dr)^2 \leq \frac{C^2}{R^2}$$

其中$C := C_0\Lambda > 0$. □

定理 3.7. *设(M, F, dm)是一个具有有限可反系数的向前完备Finsler流形, u是M上的C^2正函数. 令$V_1(r) := \int_{B_r^+(x_0)} u dm$. 若$\Delta \log u \geq 0$且*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^2}{V_1(r)} = \infty, \tag{3.1.17}$$

则u是常数. 特别地, 若$u \in L^1(M)$且$\Delta \log u \geq 0$, 则u是常数.

证明. 令$v := \sqrt{u} > 0$, 从而有

$$d(\log v) = \frac{dv}{v} = \frac{du}{2u},$$

由于u是正函数, 从而可得$M_{\log v} = M_v = M_u$和$g^{ij}(\nabla \log v) = g^{ij}(\nabla v) = g^{ij}(\nabla u)$. 因此, 在$M_{\log v} = M_v = M_u$上有

$$\nabla \log v = \frac{\nabla v}{v} = \frac{\nabla u}{2u}$$

和

$$\Delta \log v = \frac{\Delta v}{v} - \frac{F(\nabla v)^2}{v^2} = \frac{1}{2}\Delta \log u \geq 0. \tag{3.1.18}$$

从而在M_v上有

$$v\Delta v \geq F(\nabla v) \geq 0. \tag{3.1.19}$$

另外, 由文献[25]的引理3.5可得Δu在$M \setminus M_u$上几乎处处为零, 从而由引理1.5我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2R}\bigcap M_v} \varphi^2 v\Delta v &= \int_{B_{2R}} \varphi^2 v \Delta v \\
&= -\int_{B_{2R}} d(\varphi^2 v)(\nabla v) \\
&= -\int_{B_{2R}} \varphi^2 F(\nabla v)^2 - \int_{B_{2R}} 2\varphi v d\varphi(\nabla v).
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

由(3.1.19)和(3.1.20)可得

$$\int_{B_{2R}} \varphi^2 F(\nabla v)^2 \leq -2\int_{B_{2R}} \varphi v d\varphi(\nabla v).$$

由[39]中的引理7.1可得$|d\varphi(\nabla v)| \leq \Lambda F^*(d\varphi)F(\nabla v)$, 从而有

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} \varphi^2 F(\nabla v)^2 &\leq 2\Lambda \int_{B_{2R}} \varphi v F^*(d\varphi) F(\nabla v) \\
&\leq 2\Lambda \left(\int_{B_{2R}} \varphi^2 F(\nabla v)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{2R}} v^2 F^*(d\varphi)^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

即

$$\int_{B_{2R}} \varphi^2 F(\nabla v)^2 \leq 4\Lambda^2 \int_{B_{2R}} v^2 F^*(d\varphi)^2. \tag{3.1.21}$$

因此, 由(3.1.16)和(3.1.21)我们得到

$$\int_{B_R} F(\nabla v)^2 \leq \frac{4\Lambda^2 C^2}{R^2} \int_{B_{2R}} v^2 = \frac{16\Lambda^2 C^2}{(2R)^2} \int_{B_{2R}} u = 16\Lambda^2 C^2 \frac{V(2R)}{(2R)^2}. \tag{3.1.22}$$

在(3.1.22)中令$R \to \infty$, 由(3.1.17)知在B_R上$F(\nabla v) = 0$, 即, $F(\nabla u) = 0$. 由于R是任意的, 我们得到在M上$F(\nabla u) = 0$, 这表明u是常数. □

定理 3.7 推广了 Yau 在文献 [43] 定理 1 及附录中的结果, 即, 在完备的黎曼流形中, 若 $L^p(p > 0)$ 可积的函数 u 满足 $\Delta \log u = 0$, 则可推出 u 为常数.

注意, 在定理 3.7 中, 我们只讨论了 $p = 1$ 的情况, 这是因为由 (3.1.17) 我们可以推出 (3.1.1), 且由 $\Delta \log u = 0$ 可得 $\log u$ 是调和函数. 因此, 当 $p > 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 定理 3.2 的 $a)$ 和 $b)$ 已经包含了 Yau 在文献 [43] 定理 1 及附录中 $p \neq 1$ 的情况.

3.2 紧致无边的Finsler流形中调和函数的梯度估计

在这一节里, 我们将推导n维紧致无边的Finsler流形中调和函数的梯度估计, 并得到$Ric_N \geq 0 (N \in (n, \infty))$, 则紧致无边的Finsler流形中不存在非常值的调和函数. 首先, 我们给出下面命题.

命题 3.8. *设(M, F, dm)是一个n维的Finsler流形, 则对任意的C^2调和函数u和实数$N \in (n, \infty)$, 在M_u上下面不等式成立*

$$F(\nabla u)\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)) \geq \frac{1}{N-1} g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u} F(\nabla u), \nabla^{\nabla u} F(\nabla u)) + Ric_N(\nabla u). \tag{3.2.23}$$

证明. 对任意的$u \in C^2(M)$, 我们有

$$\frac{1}{2}\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)^2) = F(\nabla u)\Delta^{\nabla u} F(\nabla u) + g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u} F(\nabla u), \nabla^{\nabla u} F(\nabla u)). \tag{3.2.24}$$

另一方面, 由引理1.4及$\Delta u = 0$可得

$$\frac{1}{2}\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)^2) = Ric_\infty(\nabla u) + \|\nabla^2 u\|^2_{HS(\nabla u)}. \tag{3.2.25}$$

由(3.2.24)和(3.2.25)可得

$$F(\nabla u)\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)) = \|\nabla^2 u\|^2_{HS(\nabla u)} + Ric_\infty(\nabla u) - g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u)). \tag{3.2.26}$$

对$x \in M_u$, 选择关于$g_{\nabla u}$的正交标架$\{e_i\}$, 使得$\nabla u = u_i e_i = u_1 e_1$, 其中$u_1 > 0$且$u_i = 0 (i \geq 2)$. 我们可以得到$F(\nabla u) = u_1$和$\nabla^{\nabla u}F(\nabla u) = \sum_{j=1}^n u_{1|j} e_j$, 其中"|"表示关于$g_{\nabla u}$的Levi-Civita联络. 从而我们有

$$\begin{aligned} &\|\nabla^2 u\|^2_{HS(\nabla u)} - g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n u^2_{i|j} - \sum_{j=1}^n u^2_{1|j} \geq \sum_{i=2}^n u^2_{1|i} + \sum_{i=2}^n u^2_{i|i} \\ &\geq \sum_{i=2}^n u^2_{1|i} + \frac{1}{n-1}(\sum_{i=2}^n u_{i|i})^2, \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

其中我们利用了$\nabla^2 u$的对称性, 即, $u_{i|j} = u_{j|i} (1 \leq i, j \leq n)$. 由[39]的引理3.3可知$\Delta u = tr_{g_{\nabla u}} \nabla^2 u - S(\nabla u)$, 且$\Delta u = 0$, 我们得到

$$\sum_{i=2}^n u_{i|i} = -u_{1|1} + S(\nabla u), \tag{3.2.28}$$

把(3.2.28)代入(3.2.27)并利用基础不等式$(a+b)^2 \geq \frac{a^2}{1+\alpha} - \frac{b^2}{\alpha} (\forall \alpha > 0)$可得

$$\begin{aligned} &\|\nabla^2 u\|^2_{HS(\nabla u)} - g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u)) \\ &\geq \sum_{i=2}^n u^2_{1|i} + \frac{1}{n-1}(\frac{u^2_{1|1}}{1+\alpha} - \frac{S(\nabla u)^2}{\alpha}) \\ &\geq \frac{\sum_{j=1}^n u^2_{1|j}}{(n-1)(1+\alpha)} - \frac{S(\nabla u)^2}{(n-1)\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

由(3.2.26)和(3.2.29)可得

$$F(\nabla u)\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)) \geq \frac{g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u))}{(1+\alpha)(n-1)} - \frac{S(\nabla u)^2}{(n-1)\alpha} + Ric_\infty(\nabla u). \tag{3.2.30}$$

令$\alpha = \frac{N-n}{n-1}$, 则$(1+\alpha)(n-1) = N-1$, $(n-1)\alpha = N-n$, 从而(3.2.30)简化为

$$F(\nabla u)\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)) \geq \frac{g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u))}{N-1} + Ric_N(\nabla u).$$

□

由于 Finsler 流形上的几何量与方向有关, 因此, Finsler 流形中调和函数的梯度估计比黎曼流形上的复杂. 为此, 我们将讨论紧致无边的 Finsler 流形中调和函数的梯度估计.

由于带权的 Ricci 曲率 $Ric_N(x,y)$ 关于 y 是二次齐次的, 故 $\frac{1}{F^2(y)}Ric_N(x,y)$ 是射影球丛 SM 上的函数. 因此, 若 (M,F,dm) 是一个紧致无边的 Finsler 流形, 则 $\frac{1}{F^2}Ric_N$ 一定有界. 对于 (M,F,dm) 上的调和函数, 我们有下面的梯度估计.

定理 3.9. *设(M,F,dm)是一个n维紧致无边的Finsler流形, u是M上的调和函数, 则带权Ricci曲率Ric_N有非正下界K, 且有*

$$F(x,\nabla u)\le\sqrt{-(N-1)K}(u-\inf_M u). \tag{3.2.31}$$

证明. 由M是紧致无边的可知u是有界的, 且存在某个常数K, 使得$Ric_N\ge K$. 不是一般性, 假定u是一个正的调和函数, 否则, 我们用$u-\inf_M u+\varepsilon$代替u, 其中$\varepsilon>0$. 考虑M上的函数

$$P(x)=\frac{F(\nabla u)}{u}.$$

由于M是紧致无边的, 故φ在M中的某一点x_0达到它的极大值. 若$P(x_0)=0$, 我们得到$F(\nabla u)=P(x)=0$且(3.2.31)是显然成立的. 若$P(x_0)\ne 0$, 则$F(\nabla u)|x_0\ne 0$, 从而$x_0\in M_u$.

在带权的黎曼流形$(M,g_{\nabla u})$上在x_0对$P(x)$应用极值原理可得

$$\nabla^{\nabla u}P(x_0)=0, \tag{3.2.32}$$

$$\Delta^{\nabla u}P(x_0)\le 0, \tag{3.2.33}$$

即, 在x_0我们有

$$\nabla^{\nabla u}F(\nabla u)=P\nabla u \tag{3.2.34}$$

和

$$\Delta^{\nabla u}P=\frac{\Delta^{\nabla u}F(\nabla u)}{u}-\frac{2g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u),\nabla u)}{u^2}+2P^3\le 0. \tag{3.2.35}$$

将(3.2.35)两边同乘$F(\nabla u)$, 并利用(3.2.34), (3.2.23)和Ric_N的假设可得

$$\frac{1}{N-1}P^2(x_0)+K\le 0. \tag{3.2.36}$$

由此, 很容易得到$K \le 0$且

$$P(x_0) \le \sqrt{-(N-1)K}.$$

由于上面的不等式在x_0成立, 故在$x \in M_u$都成立. 因此,

$$F(\nabla u) \le \sqrt{-(N-1)K}u.$$

用$u - \inf_M u + \varepsilon$代替$u$并令$\varepsilon \to 0$完成了定理的证明. □

推论 3.10. *设(M, F, dm)是一个n维紧致无边的Finsler流形, u是M上的调和函数. 若$Ric_N \ge 0$, 则u是一个常数.*

3.3 Finsler流形上热方程解的唯一性定理

近年来, Finsler 流形上热方程解的问题引起了数学家的兴趣. 2009 年, Ohta 和 Sturm 在文献 [24] 中研究了 Finsler 流形上非线性的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

其中 Δ 是 Finsler 流形上的非线性 Laplacian. 他们还给出了 Finsler 流形上热方程的整体解与局部解的存在性和正则性定理 ([24]).

设 $\Omega \subset M$ 是一个开集, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, 定义狄利克雷能量([25])

$$E_\Omega(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega F^2(\nabla u)dm.$$

若 $\Omega = M$, 则 $E_\Omega = E_M$. 令

$$H^1(\Omega) := \{u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega) | E_\Omega(u) < \infty\},$$

并且记 $H^1_0(\Omega)$ 是 $C^\infty_c(\Omega)$ 关于 (Minkowski) 模 $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \|u\|_{L^2}(\Omega) + E_\Omega(u)^{\frac{1}{2}}$ 的闭包, $H^{-1}(\Omega)$ 表示 $H^1_0(\Omega)$ 的对偶空间. 下面我们给出 Finsler 流形上热方程的整体解和局部解的定义及存在性定理([24]).

定义 3.2. ([24]定义 3.1) 设 (M, F, dm) 是一个 Finsler 流形. 对某个固定的 $T > 0$, $\forall t \in [0, T]$, 设函数u定义在$M \times [0, T]$, 满足 $u(x, t) \in L^2(H^1_0(M), [0, T]) \cap H^1(H^{-1}(M), [0, T])$, 且对 $\forall \varphi \in C^\infty_c(M)$ 有

$$\int_M \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dm = -\int_M d\varphi(\nabla u) dm,$$

则称 u 是热方程在 $M \times [\,0, T]$ 上的整体解.

注意, 若 $u(x,t) \in L^2(H_0^1(M),[0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M),[0,T])$, 我们可以得到 $u \in C(L^2(M),[0,T])$([24]).

此外, Ohta 和 Sturm 还给出了整体解的存在性和正则性定理: 对每个 $u_0 \in H_0^1(M)$ 及某个 $T > 0$, 在 $M \times [0,T]$ 上存在热方程的整体解 u, 且分布 Laplace $\Delta u(x,t)$ 关于体积测度 dm 和任意的 t 是绝对连续的([24]定理 3.4).

下面给出 Finsler 流形上的 L^p $(p > 1)$可积的热方程解的唯一性定理. 它是 Peter Li 在文献 [18](命题) 中对应结果的推广.

定理 3.11. *设 (M,F,dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形. 对某个 $T > 0$, $\forall t \in [0,T]$, 假设 $u(x,t)$ 是一个定义在$M \times [0,T]$上的非负函数, 且 $u(x,t) \in L^2(H_0^1(M),[0,T]) \cap H^1(H^{-1}(M),[0,T])$, 满足 $u(x,0) = 0$, 并且对 $p > 1$, 及任意非负的 $\varphi \in C_c^\infty(M)$ 有*

$$\int_M \{\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + d\varphi(\nabla u)\} dm \leq 0, \quad \int_M u^p(x,t) dm < \infty,$$

则在 $M \times [0,T]$ 上, $u(x,t) \equiv 0$.

证明. 设φ同于引理3.6. 由分部积分可得

$$\begin{aligned} D &= \int_0^T \int_M \varphi^2(x) u^{p-1}(x,t) \Delta u(x,t) dm dt \\ &\geq \int_0^T \int_M \varphi^2(x) u^{p-1}(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} dm dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_M \varphi^2(x) u^p(x,t) dm \right\} dt \\ &= \frac{1}{p} \int_M \varphi^2(x) u^p(x,T) dm. \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

另一方面, 由散度引理可得

$$D = -2\int_0^T \int_M \varphi u^{p-1} d\varphi(\nabla u) dm dt - \int_0^T \int_M (p-1)\varphi^2 u^{p-2} F^2(\nabla u) dm dt. \tag{3.3.38}$$

由文献[39]中的引理7.1可得

$$|d\varphi(\nabla u)| \leq \Lambda F^*(d\varphi) F(\nabla u).$$

令$v=u^{\frac{p}{2}}$, 则由(3.3.38)和带有ε的柯西不等式($a\cdot b\leq \varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon},\varepsilon=\frac{1}{p-1}$)可得

$$\begin{aligned}
D &= -2\int_0^T\int_M \varphi u^{p-1}d\varphi(\nabla u)dmdt-\frac{4(p-1)}{p^2}\int_0^T\int_M\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt\\
&\leq 2\int_0^T\int_M \Lambda u^{\frac{p}{2}}F^*(d\varphi)\cdot\varphi u^{\frac{p}{2}-1}F(\nabla u)dmdt-\frac{4(p-1)}{p^2}\int_0^T\int_M\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt\\
&\leq \int_0^T\int_M\frac{2\Lambda^2}{p-1}v^2F^{*2}(d\varphi)dmdt+\int_0^T\int_M\frac{2(p-1)}{p^2}\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt\\
&- \frac{4(p-1)}{p^2}\int_0^T\int_M\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt\\
&= \frac{2\Lambda^2}{p-1}\int_0^T\int_M v^2F^{*2}(d\varphi)dmdt-\frac{2(p-1)}{p^2}\int_0^T\int_M\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt \qquad (3.3.39)
\end{aligned}$$

由(3.3.37)和(3.3.39)可得

$$\int_M\varphi^2v^2(x,T)dm+\frac{2(p-1)}{p}\int_0^T\int_M\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt\leq\frac{2p\Lambda^2}{p-1}\int_0^T\int_M v^2F^{*2}(d\varphi)dmdt$$

由φ的性质可得

$$\int_M\varphi^2v^2(x,T)dm+\frac{2(p-1)}{p}\int_0^T\int_M\varphi^2F^2(\nabla v)dmdt\leq\frac{2pC^2\Lambda^2}{(p-1)R^2}\int_0^T\int_M u^pdmdt. \qquad (3.3.40)$$

(3.3.40)令$R\to\infty$, 我们有$\int_M u^p(x,T)dm=0$和$\int_0^T\int_M F^2(\nabla v)dmdt=0$. 因此, 对所有的$x\in M$和$t>0$, $u(x,t)\equiv 0$. □

此外, Karp 和 Li 在文献 [14] 中证明了完备黎曼流形上测地球 $B_r(x_0)$ 的体积 $V(r)$, 满足 $V(r)\leq e^{cr^2}$ (c=const.), 则热方程的任意有界弱解由解的初值唯一决定. 之后, T.Sturm([34]) 和 Grigor'yan A.([4]) 把 Karp 和 Li 的结果中体积增长的条件推广到以下情况,

$$\int_1^\infty\frac{rdr}{\log V(r)}=\infty.$$

然后, Grigor'yan A. 在 [1](定理11.9)中将T.Sturm([34]) 和 Grigor'yan A.([4])结果中测地球体积增长的条件推广到更一般的情况. 下面我们将研究 Finsler 流形上的类似问题.

设 (M,F,dm) 是一个向前完备的Finsler流形. 为了方便, 记 $B_r:=B_r^+(x_0)$, 它关于 dm 的体积记为 $V(r)$. 类似于Grigor'yan A.在文献 [1](定理 11.9)中的结果, 我们有以下定理.

定理 3.12. 设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备*Finsler*流形，对某个 $T > 0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的整体解，且在 L^2_{loc} 的意义下满足 $u|_{t=0} = 0$. 假设对 $x_0 \in M$, $R > 0$ 有

$$\int_0^T \int_{B_R} u^2(x,t)dmdt \leq \exp(f(R)) \tag{3.3.41}$$

其中 $f(r)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的单增函数，使得

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{f(r)} = \infty, \tag{3.3.42}$$

则在 $M \times (0,T)$ 上，$u(x,t) \equiv 0$.

由定理3.12我们可以得到下面推论，它是推广了[4, 34]中对应的结果.

推论 3.13. 设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 *Finsler* 流形，对某个 $T > 0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的有界整体解，且在 L^2_{loc} 的意义下满足 $u|_{t=0} = 0$. 假设

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{\log V(r)} = \infty, \tag{3.3.43}$$

则在 $M \times (0,T)$ 上，$u(x,t) \equiv 0$.

证明. 令$H := \sup|u| < \infty$. 由于

$$\int_0^T \int_{B_R} u^2 dmdt \leq H^2TV(R),$$

因此，我们可以令$f(r) = \log H^2TV(r)$. 由(3.3.43)可知

$$\int_1^\infty \frac{rdr}{\log(H^2TV(R))} = \int_1^\infty \frac{rdr}{f(r)} = \infty.$$

由定理3.12可得$u \equiv 0$. □

显然，$V(r) \leq e^{cr^2}$ 满足上述推论的条件，因此，我们可以推广 Karp 和 Li [14] 中的主要定理.

推论 3.14. 设 (M, F, dm) 是一个具有有限可反系数的向前完备 Finsler 流形, 对某个 $T > 0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的有界整体解, 且在 L^2_{loc} 的意义下满足 $u|_{t=0} = 0$. 假设对正常数c有

$$V(r) \le e^{cr^2},$$

则在 $M \times (0,T)$ 上, $u(x,t) \equiv 0$.

在证明定理3.12之前, 我们先给出下面命题.

命题 3.15. 设(M, F, dm)是一个具有有限可反系数Λ的向前完备Finsler流形, 对某个 $T > 0$, $u(x,t)$ 是热方程在 $M \times (0,T)$ 上的整体解. 假设对$x_0 \in M$, $R > 0$及$0 < b < a < T$有

$$\int_b^a \int_{B_R} u^2 dmdt \le \exp(f(R)),$$

其中$f(R)$是$(0,\infty)$上正的单增函数. 若 $a - b \le \frac{R^2}{8\Lambda^4 f(4R)}$, 则我们有

$$\int_{B_R} u^2(x,a)dm \le \int_{B_{4R}} u^2(x,b)dm + \frac{4\Lambda^4}{R^2}. \tag{3.3.44}$$

证明. 令$r(x) := d(x_0, x), \forall x \in M$. 对$0 < t < s < T$, 做下列函数

$$g := \frac{-[(r-R)_+]^2}{4\Lambda^4(s-t)}, \tag{3.3.45}$$

其中$(r-R)_+ = \max\{r-R, 0\}$. 由(3.3.45)可得

$$dg = -\frac{1}{\Lambda^4}\frac{2(r-R)_+ dr}{4(s-t)}. \tag{3.3.46}$$

由(3.3.46)得

$$\begin{aligned} F^{*2}(dg) &= g^{*ij}(dg)\frac{1}{\Lambda^8}\frac{[(r-R)_+]^2}{4(s-t)^2} r_i r_j. \\ &= \frac{1}{\Lambda^8}\frac{[(r-R)_+]^2}{4(s-t)^2} g^{*ij}(-dr) r_i r_j. \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

由(3.3.47)可得

$$\frac{1}{\Lambda^{10}}\frac{[(r-R)_+]^2}{4(s-t)^2} \le F^{*2}(dg) \le \frac{1}{\Lambda^6}\frac{[(r-R)_+]^2}{4(s-t)^2}. \tag{3.3.48}$$

另外,

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-\frac{1}{\Lambda^4}\frac{[(r-R)_+]^2}{4(s-t)^2}. \tag{3.3.49}$$

由(3.3.48)和(3.3.49)我们得到

$$-\Lambda^6F^{*2}(dg)\leq\frac{\partial g}{\partial t}\leq-\Lambda^2F^{*2}(dg). \tag{3.3.50}$$

令$\varphi(x):=\min\{(3-\frac{r(x)}{R})_+,1\}$, 即

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\in M\backslash B_{3R},\\ 3-\frac{r(x)}{R} & x\in B_{3R}\backslash B_{2R},\\ 1 & x\in B_{2R}.\end{cases}$$

显然, $0\leq\varphi\leq1$, 且在$B_{3R}\backslash B_{2R}$上

$$F^*(d\varphi)=F^*(-\frac{dr}{R})\leq\frac{\Lambda}{R}. \tag{3.3.51}$$

此外, 由于

$$\int_b^a\int_M u\varphi^2e^g\frac{\partial u}{\partial t}dmdt=-\int_b^a\int_M d(u\varphi^2e^g)(\nabla u). \tag{3.3.52}$$

由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_b^a\int_M u\varphi^2e^g\frac{\partial u}{\partial t}dmdt&=\frac{1}{2}\int_b^a\int_M\varphi^2e^g\frac{\partial u^2}{\partial t}dmdt\\&=\frac{1}{2}\int_M u^2\varphi^2e^gdm|_b^a-\frac{1}{2}\int_b^a\int_M\varphi^2u^2e^g\frac{\partial g}{\partial t}dmdt.\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

由于

$$|d\varphi(\nabla v)|\leq\Lambda F^*(d\varphi)F(\nabla v),$$

故(3.3.52)的右部为

$$
\begin{aligned}
&= -\int_b^a \int_M d(u\varphi^2 e^g)(\nabla u) \\
&= -\int_b^a \int_M \varphi^2 e^g F^2(\nabla u) dmdt - 2\int_b^a \int_M u\varphi e^g d\varphi(\nabla u) dmdt \\
&- \int_b^a \int_M u\varphi^2 e^g dg(\nabla u) dmdt \\
&\le -\int_b^a \int_M \varphi^2 e^g F^2(\nabla u) dmdt + 2\int_b^a \int_M |u||\varphi| e^g \Lambda F^*(d\varphi) F(\nabla u) dmdt \\
&+ \int_b^a \int_M |u|\varphi^2 e^g \Lambda F^*(dg) F(\nabla u) dmdt \\
&\le -\int_b^a \int_M \varphi^2 e^g F^2(\nabla u) dmdt + 2\Lambda^2 \int_b^a \int_M u^2 e^g F^{*2}(d\varphi) dmdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_b^a \int_M \varphi^2 e^g F^2(\nabla u) dmdt + \int_b^a \int_M \Lambda |u| \varphi^2 e^g F^*(dg) F(\nabla u) dmdt \\
&= \int_b^a \int_M \varphi^2 e^g (-\frac{1}{2} F^2(\nabla u) + \Lambda |u| F^*(dg) F(\nabla u)) + 2\Lambda^2 \int_b^a \int_M u^2 e^g F^{*2}(d\varphi) dmdt.
\end{aligned} \tag{3.3.54}
$$

由(3.3.52),(3.3.53)和(3.3.54)可得

$$
\begin{aligned}
&\int_M u^2 \varphi^2 e^g dm|_b^a \le \int_b^a \int_M \varphi^2 e^g \left(-F^2(\nabla u) + 2\Lambda |u| F^*(dg) F(\nabla u) + u^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right) dmdt \\
&+ 4\Lambda^2 \int_b^a \int_M u^2 e^g F^{*2}(d\varphi) dmdt.
\end{aligned}
$$

再由(3.3.50)和(3.3.51)我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_M u^2 \varphi^2 e^g dm|_b^a \\
&\le \int_b^a \int_M -\varphi^2 e^g [F(\nabla u) - \Lambda |u| F^*(dg)]^2 dmdt + 4\Lambda^2 \int_b^a \int_M u^2 e^g F^{*2}(d\varphi) dmdt \\
&\le \frac{4\Lambda^4}{R^2} \int_b^a \int_{B_{3R} \setminus B_{2R}} u^2 e^g dmdt.
\end{aligned} \tag{3.3.55}
$$

由φ的定义和(3.3.55)可得

$$
\int_{B_{3R}} u^2(x,a) \varphi^2 e^g dm \le \int_{B_{3R}} u^2(x,b) \varphi^2 e^g dm + \frac{4\Lambda^4}{R^2} \int_b^a \int_{B_{3R} \setminus B_{2R}} u^2 e^g dmdt. \tag{3.3.56}
$$

令$\Omega = B_{4R}\backslash B_{2R}$. 由于$g$在$B_R$内为零, 且$0 \le \varphi \le 1$, 故由(3.3.56)可得

$$\int_{B_R} u^2(x,a)dm \le \int_{B_{4R}} u^2(x,b)e^{g(x,b)}dm + \frac{4\Lambda^4}{R^2}\int_b^a\int_\Omega u^2e^g dmdt. \tag{3.3.57}$$

令$s = 2a-b$, $t \in [b,a]$, 则$a-b \le s-t \le 2(a-b)$. 因此,

$$g(x,t) \le \frac{-[(r-R)_+]^2}{8\Lambda^4(a-b)} \le 0. \tag{3.3.58}$$

由(3.3.58)知在$\Omega \times [b,a]$上, $g(x,t) \le \frac{-R^2}{8\Lambda^4(a-b)} \le 0$, 故(3.3.57)可化简为

$$\int_{B_R} u^2(x,a)dm \le \int_{B_{4R}} u^2(x,b)dm + \frac{4\Lambda^4}{R^2}\int_b^a\int_{B_{4R}} u^2 dmdt \exp(\frac{-R^2}{8\Lambda^4(a-b)}). \tag{3.3.59}$$

由(3.3.41)和(3.3.59)我们可得

$$\int_{B_R} u^2(x,a)dm \le \int_{B_{4R}} u^2(x,b)dm + \frac{4\Lambda^4}{R^2}\exp(\frac{-R^2}{8\Lambda^4(a-b)} + f(4R)). \tag{3.3.60}$$

由于$a-b \le \frac{R^2}{8\Lambda^4 f(4R)}$, 因此, 由(3.3.60)可得

$$\int_{B_R} u^2(x,a)dm \le \int_{B_{4R}} u^2(x,b)dm + \frac{4\Lambda^4}{R^2}.$$

□

利用由上述命题, 我们可以证明定理3.12.

定理3.12的证明. 对$\forall k \ge 0$, 令$R_k = 4^kR$. 对$\forall k \ge 1$, 选择 τ_k, 使得

$$0 \le \tau_k \le \frac{R_k^2}{cf(R_k)}, \tag{3.3.61}$$

其中$c = 128\Lambda^4$. 定义递减的非负序列$\{t_k\}$, 使得

$$t_0 = t, \ \cdots, t_k = t_{k-1} - \tau_k.$$

显然, $t_k = t - (\tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_k)$.

将$a = t_{k-1}$, $b = t_k$代入(3.3.44)可得

$$\int_{B_{R_{k-1}}} u^2(x,t_{k-1})dm \le \int_{B_{R_k}} u^2(x,t_k)dm + \frac{4\Lambda^4}{R_{k-1}^2}.$$

对上式求和得

$$\int_{B_R} u^2(x,t)dm \le \int_{B_{R_k}} u^2(x,t_k)dm + \sum_{i=1}^{k}\frac{4\Lambda^4}{R_{i-1}^2}. \tag{3.3.62}$$

若存在某个k, 使得$t_k = 0$, 则$\int_{B_{R_k}} u^2(x,t_k)dm = 0$. 因此, 由(3.3.62)可得

$$\int_{B_R} u^2(x,t)dm \le \sum_{i=1}^{k}\frac{4\Lambda^4}{R_{i-1}^2} = \frac{C}{R^2}, \tag{3.3.63}$$

其中$C = C(\Lambda)$. (3.3.63)中令$R \to \infty$, 我们可以得到$u(x,t) \equiv 0$, $\forall x \in M, t \ge 0$.

下证对某个有限的k, $t_k = 0$, 即, 对某个有限的k,

$$t = (\tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_k). \tag{3.3.64}$$

由于τ_k仅由(3.3.61)限制, 且f是正的增函数, 则由(3.3.42)得

$$\infty = \int_R^\infty \frac{rdr}{f(r)} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{rdr}{f(r)} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_{k+1}^2}{f(R_k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16R_k^2}{f(R_k)}. \tag{3.3.65}$$

因此, 我们选τ_k满足(3.3.61)且满足

$$\sum_{k}^{\infty}\tau_k \to \infty.$$

由于$t_k \ge 0$, 且t是一个有限数, 故必然存在某个有限的k, 使得(3.3.64)成立. 即, 存在某个有限的k, 使得$t_k = 0$. 定理得证. □

参考文献

[1] Grigor'yan A., *Heat Kernel and Analysis on Manifold*, AMS Bookstore, 2012.

[2] Grigor'yan A., *On the existence of a Green function on a manifold*, (in Russian) Uspekhi Matem. Nauk, 38 (1)(1983), 161-162. Engl. transl.: Russian Math. Surveys, 38 (1)(1983), 190-191.

[3] Grigor'yan A., *On the existence of positive fundamental solution of the Laplace equation on Riemannian manifolds*, (in Russian) Matem. Sbornik, 128(3) (1985), 354-363. Engl. transl.: Math. USSR Sb., 56 (1987), 349-358.

[4] Grigor'yan A., *On stochastically complete manifolds*, (in Russian) DAN SSSR, 290(3) (1986), 534-537. Engl. transl.: Soviet Math. Dokl., 34 (2)(1987), 310-313.

[5] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, G. T. M200, 2000.

[6] D. Bao and S. S. Chern, *A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces*, Ann. of Math., 143(1996), 233-252.

[7] D. Bao and B. Lacky, *A Hodge decomposition theorem for Finsler spaces*, C. R. Acad. Sc. Paris, 223(1996), 51-56.

[8] Q. Chen and Y. L. Xin, *A generalized maximum principle and its applications in geometry*, Am. J. Math., 114(1992), 355 - 366.

[9] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., 28(1975), 333-354.

[10] S. M. Choi, J. H. Kwon and Y. J. Suh, *A Liouville-type theorem for complete Riemannian manifolds*, Bull. Korean Math. Soc., 35(1998), 301 - 309.

[11] Y. Ge and Z. Shen, *Eigenvalues and eigenfunctions of metric measure manifolds*, Proc. London Math. Soc., 82(2001), 725-746.

[12] Q. He and Y. B. Shen, *Some results on harmonic maps for Finsler manifolds*, Internat. J. Math., 16(9)(2005), 1017-1031.

[13] H. Lee and Kang-Tae Kim, *On the Omori-Yau almost maximum principle*, J. of Math. Anall. and Appl., 335 (2007), 332-340.

[14] Karp L., Li P., *The heat equation on complete Riemannian manifolds*, unpublished manuscript.

[15] Karp L., *Subharmonic functions on real and complex manifolds*. Math. Z., 179(4)(1982), 535 - 554.

[16] Karp L., *Subharmonic functions, harmonic mappings and isometric immersions*, in: "Seminar on Differential Geometry" , Ed. S.T.Yau, Ann. Math. Stud. 102, Princeton, 1982.

[17] X. Li, *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl., 84(10)(2005), 1295 - 1361.

[18] P. Li, *Uniqueness of L^1 solutions for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds*, J.Diff.Geom., 20(1984), 447-457.

[19] P. Li and R. Schoen, *L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds*, Acta Math., 153(1984), 279-301.

[20] X. H. Mo and Y. Yang, *The Existencr of Harmonic maps from Finsler manifolds*, Science in China, 48(2005), 115-130.

[21] S. Nishikawa, *On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorenzian manifold*, Nagoya Math. J., 95(1984), 117 - 124.

[22] S. Ohta, *Finsler interpolation inequalities*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 36(2009), 211-249.

[23] S. Ohta, *Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Reine Angew. Math., DOI:10.1515/crelle-2013-0011.

[24] S. Ohta and K. T. Sturm, *Heat flow on Finsler manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 62(2009), 1386-1433.

[25] S. Ohta and K. T. Sturm, *Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds*, Adv. Math, 252(2014), 429 - 448.

[26] S. Ohta, *Optimal transport and Ricci curvature in Finsler geometry*, Adv. Stud. Pure Math., 57(2010), 323-342.

[27] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 205-214.

[28] S. Pigola, M. Rigoli and A. G. Setti, *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*, Mem. Am. Math. Soc., 174(2005), 1-99.

[29] Y. b. Shen, *Liouville-type theorems for subharmonic functions on complete manifolds*, Acta Math. Sin., 7(1991), 375 - 382.

[30] 沈一兵, 沈忠民, *现代芬斯勒几何初步*, 高等教育出版社, 2013.

[31] Y. B. Shen and Y. Zhang, *Second variation of harmonic maps between Finsler manifolds*, Science in China, Ser. A., 47(2004), 39-51.

[32] Z. Shen, *Volume comparison and its applications in Riemannian-Finsler geometry*, Adv. Math., 128(2)(1997), 306-328.

[33] Z. Shen, *Lectures on Finsler geometry*, World Scientific Publishing Co. Singapore, 2001.

[34] K. T. Sturm, *Analysis on local Dirichlet spaces I. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties*, J.Reine Angew. Math., 456(1994), 173-196.

[35] Z. Shen, *The Non-Linear Laplacian for Finsler Manifolds. The Theory of Finsler Laplacians and Applications*, Kluwer Acad. Publ., 459(1998), 187-197.

[36] B. Thomas, *A natural Finsler-Laplace operator*, Israel J. Math, 196(1)(2013), 375-412.

[37] G. Wang and C. Xia, *A sharp lower bound for the first eigenvalue on Finsler manifolds*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) NonLinear Analysis, 30(6)(2013), 983-996.

[38] 吴炳烨, *整体Finsler几何*, 同济大学出版社, 2008.

[39] B. Wu and Y. Xin, *Comparison theorems in Finsler geometry and their applications*, Math. Ann., 337(1)(2007), 177-196.

[40] Y. Xin, *Ricci curvature and fundamental group*, Chin. Ann. of Math., 27(2)(2006), 113-120.

[41] Y. Xin, *An estimate for the image diameter and its application to submanifolds with parallel mean curvature*, Acta Math. Sci., 5(3)(1985), 303 - 308.

[42] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 28(1975), 201-208.

[43] S. T. Yau, *Some function theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*, Indi, Univ. Math., 25(1976), 659-670.

[44] S. T. Yin, Q. He and Y. B. Shen, *On lower bounds of the first eigenvalue of Finsler-Laplacian*, Publ. Math. Debrecen, 83(3)(2013), 385-405.

[45] W. Zhao and Y. B. Shen, *A universal volume comparison theorem for Finsler manifolds and related results*, Can. J. Math., 53(4)(2012), 1 - 31.

发表文章目录

[1] F. Zhang, *On the maximum principle on complete Finsler manifolds,* Diff. Geom. Appl., 31(6)(2013), 707-717.

[2] F. Zhang, Q.-L. Xia, *Some Liouville-type theorems for harmonic functions on Finsler manifolds,*(已投).

／ 致　谢

值此毕业之际, 衷心感谢导师沈一兵教授一直以来的耐心指导,帮助和鼓励, 我很幸运能够做您的学生, 能够聆听您的教诲, 感谢您对我的鼓励和不放弃. 您严谨治学态度让我受益匪浅, 对工作的热情和正直的人格对我产生了深远的影响, 让我受益终身.

感谢夏巧玲老师、沈忠民教授和盛为民教授一直以来的帮助和指导, 使我在学术方面得到了启迪和鼓励.

感谢师兄赵唯和师姐袁丽霞, 你们对我学习上的帮助与指导及生活上的关系与照顾我会一直铭记在心, 衷心祝愿你们永远快乐幸福.

感谢师兄田黄佳, 沈斌, 康琳, 师姐朱薇, 张晓玲, 感谢与你们度过的学习时光. 感谢于浩斌, 唐子婷, 徐董科等师弟师妹, 感谢你们为我带来这许多欢乐和帮助.

感谢我的好友孟庆荣, 你教会了我很多生活处事方面的知识, 让我认识到自己很多的不足之处, 从而不断的完善自己. 感谢好友郑璇, 张永, 岳芳, 谢谢你们对我的关心和带给我的很多快乐. 也感谢资料室的各位老师, 正是他们周到的服务和无私的奉献, 为我们提供了良好的学习和科研环境.

感谢我的老公姜琦对我的一直以来的支持和鼓励, 让我在困境中坚持下来. 感谢我的爸爸和我的哥哥姐姐一直以来的关心, 让我时时感到家的温暖.

最后, 祝愿老师, 家人, 朋友都永远快乐幸福.

张福娥

2013年12月

Finsler流形上某些函数论性质的研究

作者：　张福娥
学位授予单位：　浙江大学